

CORRIGÉ PB DUALITÉ

PARTIE A

- $A^\circ \neq \emptyset$ car la forme linéaire nulle appartient à A° .
 - Si $\varphi, \psi \in A^\circ$, et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a : $\forall x \in A, (\lambda\varphi + \psi)(x) = \lambda\varphi(x) + \psi(x) = 0$ donc $\lambda\varphi + \psi \in A^\circ$.
Ainsi, A° est un sev de E^* .
- Supposons $A \subset B$. Soit $\varphi \in B^\circ$. Alors, pour tout $x \in B$, $\varphi(x) = 0$ donc a fortiori $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in A$.
Ainsi, $\varphi \in A^\circ$, d'où : $B^\circ \subset A^\circ$.
- $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$ donc, d'après la question précédente, $(A \cup B)^\circ \subset A^\circ$ et $(A \cup B)^\circ \subset B^\circ$ donc $(A \cup B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$.
 - Soit $\varphi \in A^\circ \cap B^\circ$. $\varphi \in A^\circ$ donc pour tout $x \in A$, $\varphi(x) = 0$, et $\varphi \in B^\circ$ donc pour tout $x \in B$, $\varphi(x) = 0$. Ainsi, pour tout $x \in A \cup B$, $\varphi(x) = 0$ donc $\varphi \in (A \cup B)^\circ$, ce qui donne l'inclusion $A^\circ \cap B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$.
Finalement, on a bien l'égalité : $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.
- $A \subset \text{Vect}(A)$ donc $(\text{Vect}(A))^\circ \subset A^\circ$ d'après A.2.
 - Soit $\varphi \in A^\circ$, i.e $\forall x \in A, \varphi(x) = 0$. Pour tout $y \in \text{Vect}(A)$, il existe une famille de scalaires $(\lambda_i)_{i \in I}$, à support fini, et une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de A tels que $y = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$.
On a alors : $\varphi(y) = \sum_{i \in I} \lambda_i \varphi(x_i) = 0$ (car φ linéaire et $x_i \in A$). Donc $\varphi \in (\text{Vect}(A))^\circ$, et $A^\circ \subset (\text{Vect}(A))^\circ$.
Finalement on a bien : $A^\circ = (\text{Vect}(A))^\circ$.
- Démontrons d'abord le résultat suivant :
Si H et H' sont deux hyperplans de E tels que $H \subset H'$, alors $H = H'$.
C'est facile en dimension finie, bien sûr. Dans le cas général, soient H et H' deux hyperplans de E , et supposons H strictement inclus dans H' . Alors il existe a appartenant à H' mais pas à H . D'après le cours, on sait que $E = H \oplus \mathbb{K}.a$. On devrait donc avoir $E \subset H'$, contradiction.
 - Soit A un hyperplan de E . On sait d'après le cours qu'il existe une forme linéaire non nulle φ telle que $A = \text{Ker } \varphi$. Donc $\varphi \in A^\circ$, et $\mathbb{K}.\varphi \subset A^\circ$.
 - D'autre part, si $\psi \in A^\circ$, on a $A \subset \text{Ker } \psi$ donc, soit $\psi = 0$, soit $\psi \neq 0$, et alors $\text{Ker } \psi$ est un hyperplan, d'où $A = \text{Ker } \varphi = \text{Ker } \psi$ d'après le résultat préliminaire. D'après le cours, il existe alors $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\psi = \lambda\varphi$.
Dans les deux cas, on a $\psi = \lambda\varphi$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$, donc $\psi \in \mathbb{K}.\varphi$, et $A^\circ \subset \mathbb{K}.\varphi$.
Finalement, $A^\circ = \mathbb{K}.\varphi$ est une droite vectorielle de E^* .
- $E^\circ = \{0\}$. En effet : $\varphi \in E^\circ \iff \forall x \in E, \varphi(x) = 0 \iff \varphi = 0_{E^*}$.
 - Démontrons d'abord le résultat indiqué par l'énoncé :
Si A est un sous-espace vectoriel de E strictement inclus dans E , il existe un hyperplan H de E tel que $A \subset H$.
Là encore, c'est facile en dimension finie en utilisant le théorème de la base incomplète... Dans le cas général, si A est strictement inclus dans E , soit A' un supplémentaire de A . Il existe alors une forme linéaire non nulle φ' sur A' (car A' n'est pas réduit à $\{0\}$). On peut alors construire une forme linéaire φ sur E telle que la restriction de φ à A soit nulle, et que la restriction de φ à A' soit égale à φ' .
Ainsi, φ est une forme linéaire non nulle; son noyau est donc un hyperplan, qui contient A par construction.
 - Supposons donc $A^\circ = \{0\}$, et, par l'absurde, $A \subsetneq E$. D'après ce qui précède, il existe un hyperplan H tel que $A \subset H$. Alors $H^\circ \subset A^\circ$, donc A° contient une droite vectorielle : contradiction.
Finalement, on a bien l'équivalence : $A^\circ = \{0\} \iff A = E$.
- Il est clair que $\{0\}^\circ = E^*$, puisque, pour tout $\varphi \in E^*$, $\varphi(0) = 0$.

- Soit A un sous-espace vectoriel de E tel que $A^\circ = E^*$. Supposons, par l'absurde, $A \neq \{0\}$. Il existe alors $a \in A$, $a \neq 0$. En notant H un hyperplan supplémentaire de $\mathbb{K}.a$, on peut alors trouver $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(x) = 0$ si $x \in H$ et $\varphi(a) = 1$ (cf. cours).

Ainsi, $\varphi \in E^*$ et $\varphi \notin A^\circ$: contradiction.

Finalement, on a bien l'équivalence : $A^\circ = E^* \iff A = \{0\}$.

PARTIE B

1. Démonstration "duale" de celle de A.1...
2. Démonstration "duale" de celle de A.2...
3. Démonstration "duale" de celle de A.3...
4. Démonstration "duale" de celle de A.4...
5. Si $x \in A$ alors : $\forall \varphi \in A^\circ$, $\varphi(x) = 0$ (par définition même de A°), donc $x \in (A^\circ)^\circ$ d'où $A \subset (A^\circ)^\circ$.
6. • Supposons, par l'absurde, $(E^*)^\circ \neq \{0\}$. Il existe donc $a \in (E^*)^\circ$ tel que $a \neq 0$. On aurait donc : $\forall \varphi \in E^*$, $\varphi(a) = 0$. Or il est facile de construire une forme linéaire φ telle que $\varphi(a) = 1$ (cf. A.7 et cours), d'où la contradiction.

Finalement, on a bien l'implication $A' = E^* \Rightarrow A'^\circ = \{0\}$.

- Contre-exemple pour l'inclusion réciproque :

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons φ_n la forme linéaire sur E qui, à tout polynôme P , associe le réel $P(n)$, et soit $A' = \text{Vect}(\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\})$.

On a alors : $P \in (A')^\circ \iff \forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) = 0 \iff P = 0$ (car un polynôme ayant une infinité de racines est le polynôme nul).

Donc $(A')^\circ = \{0\}$. Mais on n'a pas $A' = E^*$! En effet, soit $a \notin \mathbb{N}$. Alors, la forme linéaire φ_a qui à tout polynôme P associe $P(a)$ n'appartient pas à A' : sinon, il existerait $N \in \mathbb{N}$ et des réels $\lambda_0, \dots, \lambda_N$ tels

que $\varphi_a = \sum_{i=0}^N \lambda_i \varphi_i$, et on aurait $P(a) = \sum_{i=0}^N \lambda_i P(i)$ pour tout polynôme P , ce qui est absurde comme

on le voit en considérant $P = \prod_{k=0}^N (X - k) \dots$

PARTIE C

1. • On vérifie d'abord que l'on a bien, pour toute $\varphi \in F^*$, ${}^t u(\varphi) \in E^*$! ($\varphi \circ u$ est linéaire comme composée d'applications linéaires).
 • Puis : $\forall \varphi, \psi \in F^*$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, ${}^t u(\lambda\varphi + \psi) = (\lambda\varphi + \psi) \circ u = \lambda\varphi \circ u + \psi \circ u = \lambda {}^t u(\varphi) + {}^t u(\psi)$, donc ${}^t u$ est une application linéaire de F^* dans E^* .
2. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, pour toute $\varphi \in F^*$:

$$\begin{aligned} {}^t(\lambda u + v)(\varphi) &= \varphi \circ (\lambda u + v) = \lambda\varphi \circ u + \varphi \circ v \\ &= \lambda {}^t u(\varphi) + {}^t v(\varphi) = (\lambda {}^t u + {}^t v)(\varphi) \end{aligned}$$

d'où ${}^t(\lambda u + v) = \lambda {}^t u + {}^t v$: la transposition est linéaire.

3. Pour toute $\varphi \in G^*$, on a : ${}^t(v \circ u)(\varphi) = \varphi \circ v \circ u$ et ${}^t u \circ {}^t v(\varphi) = {}^t u(\varphi \circ v) = \varphi \circ v \circ u$ donc ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$.
4. Pour toute $\varphi \in E^*$, on a : ${}^t(\text{Id}_E)(\varphi) = \varphi \circ \text{Id}_E = \varphi = \text{Id}_{E^*}(\varphi)$ donc ${}^t(\text{Id}_E) = \text{Id}_{E^*}$.
5. Soit A un sous-espace vectoriel de E stable par u . Soit $\varphi \in A^\circ$. Pour tout $x \in A$, ${}^t u(\varphi)(x) = \varphi[u(x)] = 0$ car $u(x) \in A$. Donc ${}^t u(\varphi) \in A^\circ$, c'est-à-dire A° est stable par ${}^t u$.

6. Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective, alors $u^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ et on a, d'après les questions précédentes :

$${}^t(u \circ u^{-1}) = {}^t(\text{Id}_F) = \text{Id}_{F^*} \text{ donc } {}^t(u^{-1}) \circ {}^t u = \text{Id}_{F^*}$$

et aussi

$${}^t(u^{-1} \circ u) = {}^t(\text{Id}_E) = \text{Id}_{E^*} \text{ donc } {}^t u \circ {}^t(u^{-1}) = \text{Id}_{E^*}$$

Ces deux relations montrent que ${}^t u$ est bijective de F^* dans E^* et que $({}^t u)^{-1} = {}^t(u^{-1})$.

$$\begin{aligned}
7. \text{ a) } \text{Ker}({}^t u) &= \{\varphi \in F^*, \varphi \circ u = 0\} \\
&= \{\varphi \in F^* \text{ tq } \forall x \in E, \varphi[u(x)] = 0\} \\
&= \{\varphi \in F^* \text{ tq } \forall y \in \text{Im } u, \varphi(y) = 0\} \\
&= (\text{Im } u)^\circ
\end{aligned}$$

b) On en déduit facilement, compte tenu des questions précédentes :

$$\begin{aligned}
\underline{u \text{ surjective}} &\iff \text{Im } u = F \\
&\iff (\text{Im } u)^\circ = F^\circ = \{0\} \text{ d'après A.6} \\
&\iff \text{Ker}({}^t u) = \{0\} \\
&\iff \underline{{}^t u \text{ injective}}
\end{aligned}$$

8. a) • Si $\psi \in \text{Im}({}^t u)$, il existe $\varphi \in F^*$ telle que $\psi = \varphi \circ u$. Alors, pour tout $x \in \text{Ker } u$, $\psi(x) = \varphi[u(x)] = 0$ donc $\psi \in (\text{Ker } u)^\circ$.

Ainsi, $\underline{\text{Im}({}^t u) \subset (\text{Ker } u)^\circ}$.

• Soit $\psi \in (\text{Ker } u)^\circ$. Alors, pour tout $x \in \text{Ker } u$, $\psi(x) = 0$ soit $\text{Ker } u \subset \text{Ker } \psi$.

Soit alors S un supplémentaire de $\text{Ker } u$ dans E . D'après un célèbre théorème du cours, la restriction $v = u|_S$ de u à S est un isomorphisme de S sur $\text{Im } u$.

Soit ensuite S' un supplémentaire de $\text{Im } u$ dans F . On sait qu'on peut définir une application linéaire

$$u' : F \rightarrow E \text{ par : } \begin{cases} u'(y) = v^{-1}(y) & \text{si } y \in \text{Im } u \\ u'(y) = 0 & \text{si } y \in S' \end{cases} .$$

Posons alors $\varphi = \psi \circ u' : u' \in \mathcal{L}(F, E)$ et $\psi \in E^*$ donc $\varphi \in F^*$ et l'on a :

$$\forall x \in \text{Ker } u \quad : \quad \varphi \circ u(x) = \varphi(0) = 0 = \psi(x)$$

$$\forall x \in S \quad : \quad \varphi \circ u(x) = \psi \circ u'[u(x)] = \psi(x) \text{ car } u' \circ u = \text{Id}|_S$$

Ainsi, $\psi = \varphi \circ u = {}^t u(\varphi)$ donc $\psi \in \text{Im}({}^t u)$.

On a donc l'inclusion $\underline{(\text{Ker } u)^\circ \subset \text{Im}({}^t u)}$, et, finalement, l'égalité.

b) On en déduit :

$$\begin{aligned}
\underline{u \text{ injective}} &\iff \text{Ker } u = \{0\} \\
&\iff (\text{Ker } u)^\circ = E^* \text{ d'après A.7} \\
&\iff \text{Im}({}^t u) = E^* \\
&\iff \underline{{}^t u \text{ surjective}}
\end{aligned}$$

9. a) facile

b) facile

c) $\text{Ker } \psi = \{x \in E, \hat{x} = 0\} = \{x \in E \text{ tq } \forall \varphi \in E^*, \varphi(x) = 0\} = (E^*)^\circ = \{0\}$ d'après B.6.

Donc $\underline{\psi \text{ est injective}}$.

PARTIE D

1. • Il est déjà facile de vérifier que les e_i^* sont bien des formes linéaires.
 • La propriété : $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ est immédiate compte tenu de la définition de e_i^* .
 • Montrons que la famille (e_1^*, \dots, e_n^*) est libre.

En effet, si l'on a $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^* = 0_{E^*}$ alors, pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^*(e_j) = 0,$$

ce qui implique $\lambda_j = 0$.

• Puisque $\dim E^* = \dim E = n$, la famille (e_1^*, \dots, e_n^*) est donc une base de E^* .

2. • $\dim E = \dim E^* = \dim E^{**}$ (cf. cours), et $\psi : E \rightarrow E^{**}$ est injective, donc c'est un isomorphisme de E sur E^{**} .

• Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base de E^* . Alors $(\varphi_1^*, \dots, \varphi_n^*)$ est une base de E^{**} (cf. cours). Notons alors $e_i = \psi^{-1}(\varphi_i^*)$ pour $1 \leq i \leq n$. ψ étant un isomorphisme, (e_1, \dots, e_n) est une base de E et l'on a :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \varphi_i^* = \psi(e_i) = \hat{e}_i$$

$$\text{d'où : } \forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \delta_{ij} = \varphi_i^*(\varphi_j) = \hat{e}_i(\varphi_j) = \varphi_j(e_i)$$

ce qui prouve que $\underline{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}$ est la base duale de (e_1, \dots, e_n) .

3. Soit (e_1, \dots, e_p) une base de F , que l'on complète en une base (e_1, \dots, e_n) de E .

Soit alors (e_1^*, \dots, e_n^*) sa base duale. Si $\varphi \in E^*$, il existe un unique n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^*$. On a alors :

$$\begin{aligned} \varphi \in F^\circ &\iff \varphi \in (\{e_1, \dots, e_p\})^\circ \text{ car } F = \text{Vect}(\{e_1, \dots, e_p\}) \\ &\iff \forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket, \varphi(e_j) = 0 \\ &\iff \forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket, \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^*(e_j) = 0 \\ &\iff \forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket, \lambda_j = 0 \text{ car } e_i^*(e_j) = \delta_{ij} \end{aligned}$$

Ainsi, $\varphi \in F^\circ$ si et seulement si il existe $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$ tels que $\varphi = \sum_{i=p+1}^n \lambda_i e_i^*$; F° est donc le sous-espace vectoriel de base $(e_{p+1}^*, \dots, e_n^*)$, et il est donc de dimension $n - p$.

Cela prouve que : $\dim(F) + \dim(F^\circ) = \dim(E)$.

4. Démonstration "duale" : on considère ici une base (e_1^*, \dots, e_p^*) de F' que l'on complète en une base (e_1^*, \dots, e_n^*) de E^* . Puis on considère sa base ante-duale (e_1, \dots, e_n) ; il suffit alors d'écrire les conditions nécessaires et suffisantes portant sur les coordonnées d'un vecteur x dans cette base pour qu'il appartienne à F'° ...

5. On a $F \subset (F^\circ)^\circ$ d'après B.5, et $\dim F = \dim(F^\circ)^\circ$ d'après les deux questions précédentes. La conclusion s'impose !

6. a) • On a : $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$, d'où $A^\circ \subset (A \cap B)^\circ$ et $B^\circ \subset (A \cap B)^\circ$, donc $A^\circ + B^\circ \subset (A \cap B)^\circ$ (1) (il s'agit de sous-espaces vectoriels...).

• De plus : $\dim(A \cap B)^\circ = \dim E - \dim(A \cap B)$ et :

$$\begin{aligned} \dim(A^\circ + B^\circ) &= \dim A^\circ + \dim B^\circ - \dim(A^\circ \cap B^\circ) \text{ (formule de Grassmann)} \\ &= (\dim E - \dim A) + (\dim E - \dim B) - \dim(A \cup B)^\circ \\ &= (\dim E - \dim A) + (\dim E - \dim B) - \dim(\text{Vect}(A \cup B))^\circ \\ &= 2 \dim E - \dim A - \dim B - \dim((A + B)^\circ) \\ &= 2 \dim E - \dim A - \dim B - (\dim E - \dim(A + B)) \\ &= \dim E - (\dim A + \dim B - \dim(A + B)) = \dim E - \dim(A \cap B) \end{aligned}$$

donc $\dim(A^\circ + B^\circ) = \dim(A \cap B)^\circ$ (2).

De (1) et (2), on déduit : $(A \cap B)^\circ = A^\circ + B^\circ$.

b) Rem : D'après la question A.5, si φ est une forme linéaire non nulle, on a $(\text{Ker } \varphi)^\circ = \text{Vect}(\{\varphi\})$, ce résultat restant valable même si $\varphi = 0$ d'après A.6.

(i) \Rightarrow (ii) : si φ est combinaison linéaire des φ_i , soit $\varphi = \sum_{i=1}^p \lambda_i \varphi_i$, alors pour tout $x \in \bigcap_{i=1}^p \text{Ker } \varphi_i$,

on a $\varphi_i(x) = 0$ pour tout i , d'où $\varphi(x) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \varphi_i(x) = 0$ et $x \in \text{Ker } \varphi$.

Cela démontre l'inclusion $\bigcap_{i=1}^p \text{Ker } \varphi_i \subset \text{Ker } \varphi$.

• (ii) \Rightarrow (i) : supposons $\bigcap_{i=1}^p \text{Ker } \varphi_i \subset \text{Ker } \varphi$. Alors $(\text{Ker } \varphi)^\circ \subset \left(\bigcap_{i=1}^p \text{Ker } \varphi_i \right)^\circ = \sum_{i=1}^p (\text{Ker } \varphi_i)^\circ$ d'après la question précédente (la propriété a été démontrée pour deux sous-espaces vectoriels, mais elle se généralise facilement à un nombre quelconque par récurrence).

Or, $(\text{Ker } \varphi_i)^\circ = \text{Vect}(\{\varphi_i\})$ et $(\text{Ker } \varphi)^\circ = \text{Vect}(\{\varphi\})$ d'après la remarque préliminaire, donc $\varphi \in \sum_{i=1}^p \mathbb{K} \cdot \varphi_i$, c'est-à-dire que φ est combinaison linéaire de φ_i .

7. a) $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}({}^t u)$ découle immédiatement de : $\operatorname{Ker}({}^t u) = (\operatorname{Im} u)^\circ$, de D.2 et du théorème du rang (je vous laisse le soin d'écrire les égalités...).
- b) Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ la matrice de u dans les bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F , avec $\dim E = q$, $\dim F = p$, $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_q)$ et $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_p)$.
- On a donc, par définition : $\forall k \in \llbracket 1; q \rrbracket$, $u(e_k) = \sum_{i=1}^p a_{ik} f_i$, d'où $f_j^* \circ u(e_k) = a_{jk}$ pour tout $j \in \llbracket 1; p \rrbracket$,
- soit ${}^t u(f_j^*)(e_k) = a_{jk}$ donc ${}^t u(f_j^*) = \sum_{i=1}^q a_{ji} e_i^*$ (puisque $e_i^*(e_k) = \delta_{ik}$).
- Le terme d'indice (i, j) (avec $1 \leq i \leq q$ et $1 \leq j \leq p$) de la matrice de ${}^t u$ dans les bases \mathcal{B}_E^* et \mathcal{B}_F^* est donc a_{ji} , cette matrice est donc la transposée de A .
- c) Le résultat découle immédiatement des deux questions précédentes.
-