

Préparation aux Concours (CCP)

Dualité

Dans tout le problème, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Si E est un \mathbb{K} -espace vectoriel, on rappelle que l'ensemble des formes linéaires sur E forme un \mathbb{K} -espace vectoriel pour les lois usuelles, appelé espace dual de E , et noté E^* .

On admettra que, même si E n'est pas de dimension finie, tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire dans E .

PARTIE A

Soit A une partie non vide de E . On notera A° l'ensemble des formes linéaires $\varphi \in E^*$ telles que : $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in A$ (A° s'appelle l'orthogonal de A dans E^*).

Vérifier les propriétés suivantes :

1. Pour toute partie A non vide de E , A° est un sous-espace vectoriel de E^* .
2. Pour toutes parties A et B non vides de E , on a : $A \subset B \Rightarrow B^\circ \subset A^\circ$.
3. Pour toutes parties A et B non vides de E , on a : $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.
4. Pour toute partie A non vide de E , $A^\circ = (\text{Vect}(A))^\circ$.
5. Si A est un hyperplan de E , A° est une droite vectorielle de E^* .
6. Si A est un sous-espace vectoriel de E , on a l'équivalence : $A^\circ = \{0\} \iff A = E$ (pour démontrer l'implication \Rightarrow , on pourra raisonner par l'absurde, et utiliser le fait que si A est strictement inclus dans E , il existe un hyperplan de E contenant A).
7. Si A est un sous-espace vectoriel de E , on a l'équivalence : $A^\circ = E^* \iff A = \{0\}$

PARTIE B

Soit A' une partie non vide de E^* . On notera A'° l'ensemble des vecteurs $x \in E$ tels que : $\varphi(x) = 0$ pour tout $\varphi \in A'$ (A'° s'appelle l'orthogonal de A' dans E).

Vérifier les propriétés suivantes :

1. Pour toute partie A' non vide de E^* , A'° est un sous-espace vectoriel de E .
2. Pour toutes parties A' et B' non vides de E^* , on a : $A' \subset B' \Rightarrow B'^\circ \subset A'^\circ$.
3. Pour toutes parties A' et B' non vides de E^* , on a : $(A' \cup B')^\circ = A'^\circ \cap B'^\circ$.
4. Pour toute partie A' non vide de E^* , $A'^\circ = (\text{Vect}(A'))^\circ$.
5. Pour toute partie non vide A de E , on a : $A \subset (A^\circ)^\circ$.
6. Si A' est un sous-espace vectoriel de E^* , on a l'implication : $A' = E^* \Rightarrow A'^\circ = \{0\}$.
Montrer, à l'aide d'un contre-exemple, que l'implication réciproque est fautive (on pourra se placer dans $E = \mathbb{R}[X]$).

PARTIE C

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle transposée de u l'application : $\begin{cases} {}^t u : F^* \rightarrow E^* \\ \varphi \mapsto \varphi \circ u \end{cases}$.

1. Montrer que ${}^t u$ est une application linéaire de F^* dans E^* .
2. Montrer que l'application : $u \mapsto {}^t u$ est une application linéaire de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{L}(F^*, E^*)$.
3. Soient F, G, H trois \mathbb{K} -espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$.
Montrer que : ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$.

4. Montrer que : ${}^t(\text{Id}_E) = \text{Id}_{E^*}$.
5. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et A un sous-espace vectoriel de E stable par u .
Montrer que A° est stable par ${}^t u$.
6. Montrer que, si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective, alors ${}^t u \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ est bijective et : $({}^t u)^{-1} = {}^t(u^{-1})$.
7. a) Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que : $\text{Ker}({}^t u) = (\text{Im } u)^\circ$.
b) En déduire : u surjective $\iff {}^t u$ injective.
8. a) Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que : $\text{Im}({}^t u) = (\text{Ker } u)^\circ$.
b) En déduire : u injective $\iff {}^t u$ surjective.
9. On note E^{**} , appelé bidual de E , le dual de E^* .
a) Soit $x \in E$. Démontrer que, pour $\varphi \in E^*$, l'application $\left\{ \begin{array}{l} \hat{x} : E^* \rightarrow \mathbb{K} \\ \varphi \mapsto \varphi(x) \end{array} \right.$ est linéaire (ainsi, \hat{x} appartient à E^{**}).
b) Démontrer que l'application $\left\{ \begin{array}{l} \psi : E \rightarrow E^{**} \\ x \mapsto \hat{x} \end{array} \right.$ est linéaire.
c) Démontrer que ψ est injective (ψ est appelée l'injection canonique entre E et son bidual).

PARTIE D

On suppose dans toute cette partie que E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, et on note n la dimension de E .

1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E . Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note e_i^* la i -ème forme linéaire coordonnée, c'est-à-dire l'application qui à tout vecteur x de E associe sa i -ème coordonnée dans \mathcal{B} :

$$\text{si } x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \text{ avec } x_i \in \mathbb{K}, e_i^*(x) = x_i.$$

Montrer que la famille $\mathcal{B}^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^* (cette base est appelée base duale de la base \mathcal{B}), et que l'on a :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, e_i^*(e_j) = \delta_{ij}.$$

2. Démontrer que ψ est un isomorphisme de E sur E^{**} . En déduire que, pour toute base $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ de E^* , il existe une base (e_1, e_2, \dots, e_n) de E (appelée base ante-duale) telle que $\varphi_i = e_i^*$ pour tout i .
3. Démontrer que, si F est un sous-espace vectoriel de E , alors : $\dim(F) + \dim(F^\circ) = \dim(E)$ (si $p = \dim(F)$, on pourra utiliser une base (e_1, e_2, \dots, e_n) de E telle que (e_1, e_2, \dots, e_p) soit une base de F).
4. Démontrer que, si F' est un sous-espace vectoriel de E^* , alors : $\dim(F') + \dim(F'^\circ) = \dim(E)$.
5. En déduire que, si F est un sous-espace vectoriel de E , $(F^\circ)^\circ = F$.
6. a) Montrer que, si A et B sont deux sous-espaces vectoriels de E , on a : $(A \cap B)^\circ = A^\circ + B^\circ$.
b) En déduire que, si $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ et φ sont des formes linéaires sur E , les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) φ est combinaison linéaire de $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$.
(ii) $\bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(\varphi_i) \subset \text{Ker}(\varphi)$.
7. Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
a) Montrer que u et ${}^t u$ ont même rang.
b) Si \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F sont deux bases de E et F respectivement, et si \mathcal{B}_E^* et \mathcal{B}_F^* sont leurs bases duales, et si M est la matrice de u dans les bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F , quelle est la matrice de ${}^t u$ dans les bases \mathcal{B}_F^* et \mathcal{B}_E^* ?
c) En déduire que, si M est une matrice à coefficients dans \mathbb{K} , M et ${}^t M$ ont même rang.