RÉSEAU IBNGHAZI

**MP* 1 (Rabat)**
**Groupe 2**

My Ismail Mamouni
http ://myismail.net
مُوني مُولَاي اسْمَاعِيل

**Préparation aux Concours (Notes de Cours)**

# Dualité

$E$ est isomorphe à $E^*$ (ont m̂ dimension)
Base duale : $(e_i^*)_{1\leq i\leq n}$ tq $e_i^*(e_j)=\delta_{ij}$ $\qquad f^*=\sum_{i=1}^n f^*(e_i)e_i^*$
Une base duale de $E^*$ est la base duale d'une unique base de $E$
$\to$ si on trouve $(e_i)$ et $(e_i^*)$ tq $e_i^*(e_j)=\delta_{ij}$ alors $(e_i)$ est une base de $E$ de base duale $(e_i^*)$
Les polyn̂ interpolateurs de Lagrange $(W_j)_{0\leq j\leq n}$ sont une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et $(\varphi_i^* : P\mapsto P(a_i))$ la base duale associée

$\forall \varphi\in E^*, \exists! a\in E, \forall x\in E, \varphi(x)=<a|x>$ $\qquad \forall M\in \mathcal{M}_n^*, \exists! A\in\mathcal{M}_n, \varphi(M)=\mathrm{tr}(AM)$
démo : mq $\phi:\mathcal{M}_n\to\mathcal{M}_n^*$ / $A\mapsto[M\mapsto \mathrm{tr}(AM)]$ est injective

Orthogonal : $\forall A\in\mathcal{P}(E), A^\perp=\{f^*\in E^* \,/\, \forall x\in A, f^*(x)=0\}$ $\qquad \forall B\in\mathcal{P}(E^*), B^\circ=\{x\in E \,/\, \forall f^*\in B, f^*(x)=0\}$
ce sont des ss-EV de $E$
$F\subset(F^\perp)^\circ$ (égalité ssi $F$ ss-EV) $\qquad F=((F^\perp)^\circ)^\perp$ $\qquad (F+G)^\perp=F^\perp\cap G^\perp$
$F^\perp+G^\perp\subset(F\cap G)^\perp$ (= ssi $F$ et $G$ ss-EV) $\qquad$ (et vice versa...) $\qquad F\subset G\Rightarrow G^\perp\subset F^\perp$
$(\mathrm{Ker}\,\varphi)^\perp=\mathrm{Vect}\,\varphi$
Si $F$ ss-EV de $E$ de dim $n$ alors $\dim F^\perp=n-\dim F$ et $\dim G^\circ=n-\dim E$
démo : prendre une base de $E^*$ et mq $F^\perp\oplus F^*=E$
donc $F\mapsto F^\perp$ est bijective de réciproque $G\mapsto G^\circ$
Si $F$ et $G$ ss-EV alors $F=G \Leftrightarrow F^\perp=G^\perp$

$\mathrm{Vect}(e_i)=E\Leftrightarrow \mathrm{Vect}(e_i)^\perp=\{0\}$ $\quad (=E^\perp)$
$\mathrm{Vect}(\varphi_i)^\circ=(\sum\mathrm{Vect}(\varphi_i))^\circ=\bigcap\mathrm{Vect}(\varphi_i)^\circ=\bigcap\mathrm{Ker}(\varphi_i)$

Intersection d'hyperplans : $\dim\bigcap_{1\leq s\leq t}H_s\geq n-t$ (égalité ssi $(f_s^*)_{1\leq s\leq t}$ libre)
Si $f^*(x)=0$ est l'éq d'un hyperplan, tt les autres éq st de la forme $\lambda f^*(x)=0$ $(\lambda\neq 0)$
démo : si $H=\mathrm{Ker}\,\varphi=\mathrm{Ker}\,\psi$ mq $\lambda=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ convient avec $x$ ds $E\ominus H$
$(e_1,\ldots,e_n)$ base de $E\Leftrightarrow f^*\mapsto(f^*(e_s)_{1\leq s\leq n})$ isomorphisme d'EV entre $E^*$ et $\mathbb{K}^n$

Transposée de $f\in\mathcal{L}(E,F)$ : l'unique ${}^tf\in\mathcal{L}(F^*,E^*)$ tq : $\forall\psi\in F^*, {}^tf(\psi)=\psi\circ f$
$\forall\psi\in F^*, \forall x\in E, <{}^tf(\psi)|x>=<\psi|f(x)>$
$\mathrm{rg}\,f=\mathrm{rg}\,{}^tf$ $\qquad \mathrm{Ker}\,{}^tf=(\mathrm{Im}\,f)^\perp$ $\qquad \mathrm{Im}\,{}^tf=(\mathrm{Ker}\,f)^\perp$ $\qquad {}^t(g\circ f)={}^tf\circ{}^tg$
$F$ stable par $f\Leftrightarrow F^\perp$ stable par ${}^tf$

Tt hyperplan $H$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contient une matrice inversible
démo : $\exists\varphi, H=\mathrm{Ker}\,\varphi$, puis $\exists A, \varphi: M\mapsto\mathrm{tr}(AM)$, puis $A\sim J_r$