My Ismail Mamouni
http ://myismail.net
مُوني مُولَاي اسماعِيل

Préparation aux Concours (X)

Dualité

Notations, Définitions

Dans tout ce problème, $\mathbb{K}$ désignera un corps de caractéristique nulle, c'est-à-dire un corps tel que, pour tout entier $n \neq 0$, on a $n \cdot 1 \neq 0$ dans $\mathbb{K}$ où 1 désigne l'unité de la loi multiplicative de $\mathbb{K}$, et $n \cdot 1 = 1 + \cdots + 1$.

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension *finie*. On rappelle les trois points suivants.

– Une *forme bilinéaire symétrique sur* V est une application $b : V \times V \to \mathbb{K}$ telle que

$$b(x, y) = b(y, x) \text{ et } b(x + \lambda y, z) = b(x, z) + \lambda b(y, z)$$

pour tous $x, y, z \in V$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

– Une *forme quadratique sur* V est une application $q : V \to \mathbb{K}$ telle que :
  i) $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $v \in V$;
  ii) l'application $\widetilde{q} : V \times V \to \mathbb{K}$ définie par $(x, y) \mapsto \widetilde{q}(x, y) = \dfrac{1}{2}\Big(q(x + y) - q(x) - q(y)\Big)$ est bilinéaire symétrique.

– Une forme quadratique est dite *non dégénérée* si, pour tout $v \in V - \{0\}$, il existe $w \in V$ tel que $\widetilde{q}(v, w) \neq 0$.

On notera $\mathcal{Q}(V)$ l'ensemble des formes quadratiques *non dégénérées* sur V.

Soient V et V' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

– Une *isométrie* entre deux formes quadratiques $q : V \to \mathbb{K}$ et $q' : V' \to \mathbb{K}$ est un isomorphisme linéaire $f : V \to V'$ tel que $q' \circ f = q$. On notera $q \cong q'$ si q et q' sont isométriques, c'est-à-dire s'il existe une isométrie entre q et q'.

On notera $O(q) := \{\ f \in \mathrm{GL}(V) \mid q \circ f = q\}$ le sous ensemble de $\mathrm{GL}(V)$ des isométries $f : V \to V$ entre q et elle-même. On appelle $O(q)$ *le groupe orthogonal de* q.

Les deuxième et troisième parties du problème sont largement indépendantes.

Préliminaires sur les formes quadratiques et les isométries

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K} - \{0\}$. On note $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ la forme quadratique q définie sur $\mathbb{K}^n$ par la formule

$$q(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2\,.$$

1. Démontrer que $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ est bien une forme quadratique sur $\mathbb{K}^n$.

2. Démontrer que l'application $q \mapsto \widetilde{q}$ est une bijection de l'ensemble des formes quadratiques sur V sur les formes bilinéaires *symétriques* sur V.

3. Soit $\mathcal{B} := (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de V. On associe à toute forme bilinéaire symétrique b sur V une matrice symétrique $\Phi_{\mathcal{B}}(b) := \big(b(e_i, e_j)\big)_{i,j=1\ldots n}$ appelée *matrice de b dans la base $\mathcal{B}$*. On rappelle que $b \mapsto \Phi_{\mathcal{B}}(b)$ est un isomorphisme entre l'espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques sur V et celui des matrices symétriques carrées de taille n.
   (a) Démontrer qu'une forme quadratique q sur V est non dégénérée si et seulement si le déterminant $\det\big(\Phi_{\mathcal{B}}(\tilde{q})\big)$ est non nul.
   (b) Quelle est la matrice de $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$? En déduire que $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in \mathcal{Q}(\mathbb{K}^n)$.

4. Soit $q \in \mathcal{Q}(V)$ une forme quadratique non dégénérée sur V.
   (a) Soit V' un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et q' une forme quadratique sur V'. Démontrer que si q et q' sont isométriques, alors q' est dans $\mathcal{Q}(V')$, c'est-à-dire non dégénérée.
   (b) Pour $x \neq 0$, on note $\{x\}^{\perp} := \{y \in V \mid \widetilde{q}(x, y) = 0\}$. Montrer que $\{x\}^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de V de dimension $n - 1$.
   (c) A quelle condition sur x le sous-espace $\{x\}^{\perp}$ est-il un supplémentaire de la droite $\mathbb{K}x$ dans V ?

5. Soient $q \in \mathcal{Q}(V)$ et $q' \in \mathcal{Q}(V')$ où V' est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Démontrer que $O(q)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$ et que si $q \cong q'$, alors $O(q)$ et $O(q')$ sont deux groupes isomorphes.

Première partie : Existence des bases orthogonales

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $q \in \mathcal{Q}(V)$.

6. On dit que q est *isotrope* s'il existe $x \in V - \{0\}$ tel que $q(x) = 0$. Dans le cas contraire, on dit que q est *anisotrope*.
   (a) Démontrer qu'il existe $x \in V$ tel que $q(x) \neq 0$.
   (b) On note h la forme quadratique sur $\mathbb{K}^2$ définie par $h(x_1, x_2) = x_1 x_2$ (on ne demande pas de vérifier que h est une forme quadratique). Montrer que si V est de dimension deux et q est isotrope alors q est isométrique à h.
   (c) Démontrer que si $q \in \mathcal{Q}(V)$ est isotrope, alors $q : V \to \mathbb{K}$ est surjective.

7. Une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de V est dite *orthogonale pour* q si $\widetilde{q}(e_i, e_j) = 0$ pour tout $i \neq j$.
   (a) Montrer qu'il existe une base orthogonale pour q.
   Indication : on pourra considérer $\{x\}^{\perp} = \{y \in V \mid \widetilde{q}(x, y) = 0\}$ et utiliser les questions 4c et 6a.
   (b) En déduire qu'il existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K} - \{0\}$ tels que $q \cong \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$.

Deuxième partie : Étude de $O(q)$ quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

On suppose dans cette partie que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

8. Soit $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ $(n \geq 1)$. Démontrer qu'il existe un couple d'entiers (r, s) $(r + s = n)$ tel que q soit isométrique à $Q_{r,s}$ définie sur la base canonique de $\mathbb{R}^n$ par

$$Q_{r,s}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{r} x_i^2 - \sum_{j=r+1}^{n} x_j^2 .$$

Soit $j : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'isomorphisme linéaire qui à tout endomorphisme associe sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On note $O_{r,s} := j(O(Q_{r,s}))$ le sous-ensemble de matrices associé au groupe orthogonal $O(Q_{r,s})$ de $Q_{r,s}$.

9. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire et $M = j(f)$ sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
   Démontrer que $M \in O_{r,s}$ si et seulement si ${}^t M I_{r,s} M = I_{r,s}$ où $I_{r,s}$ est la matrice $I_{r,s} = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,s} \\ 0_{s,r} & -I_s \end{bmatrix}$, I_p désigne la matrice identité de taille $p \times p$ et $0_{p,q}$ la matrice nulle de taille $p \times q$ pour tous entiers p et q.
   Que peut-on dire du déterminant $\det(M)$ de M si $M \in O_{r,s}$?

10. Démontrer que $O_{r,s}$ est un sous-groupe *fermé* de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$, de sa topologie de $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie).

11. On note $O(n)$ le groupe orthogonal usuel de $\mathbb{R}^n$ (qui s'identifie à $O_{n,0}$). On note $K_{r,s} := O_{r,s} \cap O(n)$.
Démontrer que $K_{r,s}$ est compact et en bijection avec $O(r) \times O(s)$.

12. Démontrer que $SO(2) = \{M \in O(2) \mid \det(M) = 1\}$ est connexe par arcs.

13. Soit $H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2 + y^2 + 1\}$ un hyperboloïde à deux nappes.
    (a) Démontrer que si $f \in O(Q_{2,1})$, alors $f(H) = H$.
    (b) On note $SO_{2,1} := \{M \in O_{2,1} \mid \det(M) = 1\}$. Démontrer que $SO_{2,1}$ est un sous-groupe fermé de $O_{2,1}$.

14. Pour $f \in O(Q_{2,1})$, on note (x_f, y_f, z_f) le vecteur $f(0, 0, 1)$. On note également $SO^+_{2,1} := \{M = j(f) \in SO_{2,1} \mid z_f > 0\}$.
    (a) Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application linéaire r_t dont la matrice (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) vaut $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}(t) & \mathrm{sh}(t) \\ 0 & \mathrm{sh}(t) & \mathrm{ch}(t) \end{bmatrix}$ est dans $SO^+_{2,1}$ (on pourra appeler par la suite une telle application linéaire une *rotation hyperbolique*).
    (b) Soit $M = j(f)$. On suppose que $M \in SO^+_{2,1}$. Montrer qu'il existe une rotation (au sens usuel) ρ d'axe $(0, 0, 1)$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que $r_t \circ \rho \circ f \in SO^+_{2,1}$ et vérifie $r_t \circ \rho \circ f(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$.
    (c) Démontrer que $SO^+_{2,1}$ est connexe par arcs.

15. Déduire de la question 14 que $O_{2,1}$ est la réunion de quatre sous-ensembles fermés disjoints deux à deux et connexes par arcs.

16. Démontrer qu'il existe un morphisme surjectif de groupes $\psi : O_{2,1} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dont le noyau est $SO^+_{2,1}$.

Troisième partie

On revient dans cette dernière partie au cas où $\mathbb{K}$ est un corps quelconque de caractéristique nulle.

Si V et V' sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $q \in \mathcal{Q}(V)$ et $q' \in \mathcal{Q}(V')$ sont deux formes quadratiques non dégénérées, la *somme orthogonale* $q \perp q'$ de q et q' est la forme quadratique sur $V \times V'$ définie par

$$q \perp q'(x, x') = q(x) + q'(x')$$

pour tout $x \in V$ et tout $x' \in V'$.

17. Soient V, V' et V'' trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $(q, q', q'') \in \mathcal{Q}(V) \times \mathcal{Q}(V') \times \mathcal{Q}(V'')$.
    (a) Montrer que $q \perp q' \in \mathcal{Q}(V \times V')$ puis que $(q \perp q') \perp q'' \cong q \perp (q' \perp q'')$.
    (b) Montrer que si $q' \cong q''$ alors $q \perp q' \cong q \perp q''$.
    (c) Démontrer que si $V = V' \oplus V''$ et $\tilde{q}(x, y) = 0$ pour tout $x \in V'$ et tout $y \in V''$, alors $q \cong q' \perp q''$ où q' est la restriction de q à V' et q'' celle de q à V''.

18. Soient V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $q \in \mathcal{Q}(V)$ et $v, w \in V$ deux vecteurs *distincts* de V tels que $q(v) = q(w) \neq 0$.
    On veut montrer dans cette question qu'il existe alors une isométrie $h \in O(q)$ telle que $h(v) = w$.
    (a) Soit $x \in V$ tel que $q(x) \neq 0$. On note s_x l'endomorphisme de V défini par $y \mapsto s_x(y) = y - 2\frac{\tilde{q}(x,y)}{q(x)}x$. Montrer que s_x et $-s_x$ appartiennent à $O(q)$.
    (b) On suppose ici que $q(w - v) \neq 0$. Montrer que l'application s_{w-v} est une isométrie telle que $s_{w-v}(v) = w$.
    (c) On suppose ici que $q(w - v) = 0$. Montrer qu'il existe une isométrie $g \in O(q)$ telle que $g(v) = w$ et conclure.

19. Soient $(V_i)_{1 \leq i \leq 3}$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $q_i \in \mathcal{Q}(V_i)$ pour $1 \leq i \leq 3$ vérifiant $q_1 \perp q_3 \cong q_2 \perp q_3$. Montrer que $q_1 \cong q_2$.
    Indication : on pourra raisonner par récurrence et utiliser les questions 17 et 18.

20. Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $q \in \mathcal{Q}(V)$. Montrer qu'il existe un unique entier m positif ou nul et une forme quadratique anisotrope q_{an}, *unique à isométrie près*, tels que $q \cong q_{an} \perp m \cdot h$ où $m \cdot h = h \perp \cdots \perp h$ est la somme orthogonale de m copies de h et h est la forme quadratique introduite par la question 6b.
    Indication : on pourra utiliser la question 6b et la question précédente.

* *
*