RÉSEAU IBNGHAZI
MP* 1 (Rabat)
Groupe 2

My Ismail Mamouni
http ://myismail.net
مُولَاي اسماعيل مَمُّونِي

Préparation aux Concours (Notes de Cours)

Familles Totales

1 Définition et exemples

Définition : Suite totale

On dit que la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **totale** dans l'espace préhilbertien réel $(E, (\cdot|\cdot))$ lorsque $\mathrm{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans E, c'est-à-dire $\overline{\mathrm{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{N}}} = E$.

Autrement dit, lorsque, pour tout $x \in E$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_d$ dans $\mathbb{R}$ tels que

$$\left\| x - \sum_{k=0}^{d} \alpha_k e_k \right\| \leqslant \varepsilon$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne associée à $(\cdot|\cdot)$.

Exemple : fondamental

On considère deux réels a et b tels que $a < b$.

On note w est une fonction continue strictement positive intégrable sur $[a, b]$. Munissons $\mathscr{C}([a, b], \mathbf{R})$ du produit scalaire

$$(f|g) = \int_a^b w(t) f(t) g(t)\, dt$$

Alors la famille $\left(t \mapsto t^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est totale. Plus généralement, toute famille $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions polynômes vérifiant, pour tout n, $\deg(e_n) = n$, est totale.

En effet, la clé est ici le théorème de Weierstrass. On commence par comparer la norme $\|.\|$ associée au produit scalaire et la norme N_∞ de la convergence uniforme : notant $E = \mathscr{C}([a, b], \mathbf{R})$,

$$\forall f \in E \qquad \|f\| \leqslant k N_\infty$$

avec $k = \sqrt{\int_a^b w}$. Il y a par théorème de Weierstrass une suite (P_n) d'éléments de $\mathrm{Vect}((e_n)_{n\in\mathbf{N}})$ qui converge vers f pour N_∞. A fortiori il y a convergence pour $\|.\|$.

2 Caractérisation par les projections orthogonales

Propriété

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de l'espace préhilbertien réel $(E,(\cdot|\cdot))$.
Pour tout n, p_n désigne la projection orthogonale sur Vect$(e_0,\dots,e_n)$.
Alors, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale si et seulement si pour tout $x\in E$, la suite $\left(p_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

Démonstration

Le sens réciproque est immédiat, par définition d'une suite totale.
Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale, $x\in E$, $\varepsilon>0$.
On a $y\in \mathrm{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\|y-x\|\leqslant\varepsilon$.
Soit d tel que $y\in\mathrm{Vect}(e_0,\dots,e_d)$.
Si $n\geqslant d$, $y\in\mathrm{Vect}(e_0,\dots,e_n)$ et $\mathrm{d}(x,\mathrm{Vect}(e_0,\dots,e_n))=\|x-p_n(x)\|\leqslant\|x-y\|\leqslant\varepsilon$, ce qui permet de conclure. □

3 Complément

Exercice : Égalité de Bessel-Parseval

Si $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est orthonormale dans l'espace préhilbertien réel $(E,\langle.\rangle)$, alors,

$$\forall x\in E \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\langle e_n,x\rangle^2\leqslant\|x\|^2$$

et $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est totale si et seulement si

$$\forall x\in E \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\langle e_n,x\rangle^2=\|x\|^2$$

L'inégalité a été vue (inégalité de Bessel). L'équivalence vient de la simple remarque suivante (voir chapitre sur la projection orthogonale sur un sev de dimension finie) :

$$\|x-p_n(x)\|^2=\|x\|^2-\|p_n(x)\|^2=\|x\|^2-\sum_{k=0}^{n}(e_k|x)^2$$

et de la proposition précédente.

Exercice

Si $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est totale, si $F=$ Vect$(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$, alors $F^\perp=\{0_E\}$

Il suffit de dire que, si $x\in F^\perp$, alors $p_n(x)=0_E$ pour tout x. Or la suite $(p_n(x))$ converge vers x...