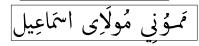


My Ismail Mamouni

http://myismail.net



# Préparation aux Concours (Notes de Cours)

# **Familles Totales**

# 1 Définition et exemples

**Définition: Suite totale** 

On dit que la suite  $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$  est **totale** dans l'espace préhilbertien réel  $(E,(\cdot|\cdot))$  lorsque  $\mathrm{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$  est dense dans E, c'est-à-dire  $\overline{\mathrm{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{N}}}=E$ .

Autrement dit, lorsque, pour tout  $x \in E$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\alpha_0, \dots, \alpha_d$  dans  $\mathbb{R}$  tels que

$$\left\| x - \sum_{k=0}^{d} \alpha_k e_k \right\| \leqslant \varepsilon$$

où || · || est la norme euclidienne associée à (·|·).

### **Exemple: fondamental**

On considère deux réels a et b tels que a < b.

On note w est une fonction continue strictement positive intégrable sur [a,b]. Munissons  $\mathscr{C}([a,b],\mathbf{R})$  du produit scalaire

$$(f|g) = \int_{a}^{b} w(t)f(t)g(t) dt$$

Alors la famille  $(t \mapsto t^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est totale. Plus généralement, toute famille  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions polynômes vérifiant, pour tout n,  $\deg(e_n) = n$ , est totale.

En effet, la clé est ici le théorème de Weierstrass. On commence par comparer la norme  $\|.\|$  associée au produit scalaire et la norme  $N_{\infty}$  de la convergence uniforme : notant  $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbf{R})$ ,

$$\forall f \in E \qquad \|f\| \leqslant kN_{\infty}$$

avec  $k = \sqrt{\int_a^b w}$ . Il y a par théorème de Weierstrass une suite  $(P_n)$  d'éléments de  $\text{Vect}((e_n)_{n \in \mathbb{N}})$  qui converge vers f pour  $N_{\infty}$ . A fortiori il y a convergence pour  $\|.\|$ .

# 2 Caractérisation par les projections orthogonales

### Propriété

Soit  $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$  une suite d'éléments de l'espace préhilbertien réel  $(E,(\cdot|\cdot))$ .

Pour tout n,  $p_n$  désigne la projection orthogonale sur  $Vect(e_0,...,e_n)$ .

Alors,  $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$  est totale si et seulement si pour tout  $x\in E$ , la suite  $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$  converge vers x.

#### **Démonstration**

Le sens réciproque est immédiat, par définition d'une suite totale.

Si  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est totale,  $x \in E$ ,  $\varepsilon > 0$ .

On a  $y \in \text{Vect}(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tel que  $||y - x|| \le \varepsilon$ .

Soit d tel que  $y \in Vect(e_0, ..., e_d)$ .

 $\text{Si } n \geqslant d, \ y \in \text{Vect}(e_0, \dots, e_n) \text{ et } \mathrm{d}(x, \text{Vect}(e_0, \dots, e_n)) = \left\| x - p_n(x) \right\| \leqslant \left\| x - y \right\| \leqslant \varepsilon, \text{ ce qui permet de conclure}.$ 

# 3 Complément

### Exercice : Égalité de Bessel-Parseval

Si  $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$  est orthonormale dans l'espace préhilbertien réel  $(E,\langle.\rangle)$ , alors,

$$\forall x \in E$$
 
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_n, x \rangle^2 \le ||x||^2$$

et  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est totale si et seulement si

$$\forall x \in E \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_n, x \rangle^2 = \|x\|^2$$

L'inégalité a été vue (inégalité de Bessel). L'équivalence vient de la simple remarque suivante (voir chapitre sur la projection orthogonale sur un sev de dimension finie) :

$$\|x - p_n(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_n(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=0}^{n} (e_k|x)^2$$

et de la proposition précédente.

### Exercice

Si  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est totale, si  $F = \text{Vect}(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , alors  $F^{\perp} = \{0_E\}$ 

Il suffit de dire que, si  $x \in F^{\perp}$ , alors  $p_n(x) = 0_E$  pour tout x. Or la suite  $(p_n(x))$  converge vers  $x \dots$