MP* 1 (Rabat)
Groupe 2

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

مُولَاي اسمَاعِيل تَمُونِي

Préparation aux Concours (Notes de Cours)

Coefficients de Fourier

7.1 Espaces de Hilbert

7.1.1 Quelques définitions et rappels

Définition 7.1. *Un espace vectoriel normé* $(H, \| \, \|)$ *sur* $\mathbb{C}$ *(ou* $\mathbb{R}$*) est de Hilbert si sa norme provient d'un produit scalaire et s'il est* complet.

Nous nous plaçons dans toute la suite dans le cas d'un espace vectoriel complexe, tous les résultats étant immédiatement adaptables au cas réel. Pour $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ $(x, y \in \mathbb{R})$, nous notons $\bar{z}$ son conjugué : $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$.

Rappelons qu'un produit scalaire $\langle . , . \rangle$ est une *forme sesquilinéaire hermitienne définie positive*, autrement dit vérifiant pour tous f, g, $h \in H$ et tout $a \in \mathbb{C}$

i) $\langle g, f\rangle = \overline{\langle f, g\rangle}$;

ii) $\langle f + g, h\rangle = \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle$;

iii) $\langle af, g\rangle = a\langle f, g\rangle, \quad \langle f, ag\rangle = \bar{a}\langle f, g\rangle$;

iv) $\langle f, f\rangle \in \mathbb{R}_+$;

v) $\langle f, f\rangle = 0 \Rightarrow f = 0$.

Grâce à iv), on peut poser

$$\|f\| := (\langle f, f\rangle)^{1/2}.$$

Par iii) on a l'homogénéité $\|af\| = (a\bar{a})^{1/2}\|f\| = |a|\|f\|$. Les propriétés i) à iv) impliquent classiquement l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$\forall f, g \in H, \quad |\langle f, g\rangle| \leq \|f\|\|g\|. \tag{7.1}$$

De cette inégalité on déduit la sous-additivité de $\| \, \|$:

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

En effet,

$$\begin{aligned}\|f+g\|^2 = \langle f+g, f+g\rangle &= \langle f,f\rangle + \langle f,g\rangle + \langle g,f\rangle + \langle g,g\rangle \\ &\leq \|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2 \\ &= \big(\|f\| + \|g\|\big)^2.\end{aligned}$$

Ainsi l'homogénéité, la sous-additivité et v) montrent que $\|\ \|$ est bien une norme. La distance associée est $d(f,g) := \|f-g\|$ et c'est relativement à cette distance que H est complet.

Exemple 7.1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace mesuré, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'espace $\mathrm{L}^2_{\mathbb{K}}(\mu)$, muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle := \int_\Omega f\bar{g}\,\mathrm{d}\mu$$

est un espace de Hilbert.

Définition 7.2. *Une partie G de H est dite* dense *dans H si*

$$\forall h \in H, \forall \varepsilon > 0,\ \exists g \in G; \quad \|g-h\| < \varepsilon,$$

ou de manière équivalente si tout h de H est limite d'une suite d'éléments g_n de G : $\|g_n - h\| \to 0$.

Définition 7.3. *Une partie F de H est dite* totale *si l'ensemble des combinaisons linéaires finies des éléments de F est dense dans H.*

Définition 7.4. *Une famille $\{e_i,\ i \in I\}$ d'éléments de H est dite* orthonormée *si*

$$\forall i \in I,\ \forall j \in I, \quad \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j} := \begin{cases} 1 & si\ i = j, \\ 0 & si\ i \neq j. \end{cases}$$

Définition 7.5. *Une base hilbertienne de H ou base orthonormée est une famille orthonormée totale dans H.*

Pour l'instant cette définition reste formelle et nous ne savons pas s'il est possible (et en quel sens) de décomposer un élément quelconque de H sur une base hilbertienne de H (s'il en existe). Le cas particulier où H est de dimension finie est bien connu et l'on sait qu'il possède toujours une base orthonormée de cardinal égal à la dimension de l'espace.

7.1.2 Bases hilbertiennes et séparabilité

Rappelons qu'un espace métrique est séparable s'il possède un sous-ensemble dénombrable dense. La plupart des espaces de Hilbert utilisés en pratique sont séparables. Tout espace de Hilbert possédant une *suite* totale $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est séparable. Il suffit pour le voir de prendre comme partie dénombrable dense l'ensemble des combinaisons linéaires finies des f_k à coefficients rationnels (ou dans $\mathbb{Q} + \mathrm{i}\mathbb{Q}$ dans le cas complexe).

Proposition 7.6. *Tout espace de Hilbert séparable de dimension infinie possède une base hilbertienne dénombrable.*

Démonstration. Soit $\{g_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ une suite dense dans H. On peut en extraire par récurrence une sous-suite $(g_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ telle que

a) Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\{g_{n_j};\ 0 \le j \le i\}$ est une famille libre.

b) Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Vect}\{g_k;\ 0 \le k \le n_i\} = \mathrm{Vect}\{g_{n_j};\ 0 \le j \le i\} =: E_i$.

c) $E := \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i \supset \{g_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

En orthogonalisant $(g_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ par le procédé de Gram Schmidt on construit une suite orthonormée $(f_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $(f_{n_j})_{0\le j\le i}$ soit une base orthonormée de l'espace de dimension finie E_i. Pour montrer que la suite $(f_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H, il reste à vérifier qu'elle est totale dans H. Soit f quelconque dans H et $\varepsilon > 0$. Par c) et la densité de $\{g_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ dans H, il existe $g \in E$ tel que $\|f - g\| < \varepsilon$. Comme E est la réunion des E_i, il existe un indice $i \in \mathbb{N}$ tel que $g \in E_i$. Or les $(f_{n_j})_{0\le j\le i}$ forment une base de l'espace de dimension finie E_i donc g se décompose dans cette base sous la forme $g = \sum_{j=0}^{i} a_j f_{n_j}$. Bien sûr, g, i et les a_j dépendent de f et de ε, mais le raisonnement est valable pour tout f et tout ε. La suite $(f_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ est donc totale dans H. □

Proposition 7.7. *Si H est un espace de Hilbert séparable, toute base orthonormée de H est au plus dénombrable.*

Démonstration. Soit $\{e_i,\ i \in I\}$ une base orthonormée dans H. Pour prouver que I est au plus dénombrable, il suffit de montrer l'existence d'une injection de I *dans* $\mathbb{N}$. Remarquons d'abord que si i et j sont deux éléments distincts de I,

$$\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}.$$

Par séparabilité de H, il existe un ensemble dénombrable $\{g_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ dense dans H. Pour chaque $i \in I$, il existe alors un entier n_i tel que

$$\|e_i - g_{n_i}\| < \frac{\sqrt{2}}{3}. \tag{7.2}$$

En choisissant pour chaque $i \in I$, un seul entier n_i parmi tous ceux vérifiant (7.2), on définit une application $\varphi : I \to \mathbb{N}$, $i \mapsto n_i$.

Par inégalité triangulaire on a alors pour $i \ne j$

$$\sqrt{2} = \|e_i - e_j\| \le \|e_i - g_{n_i}\| + \|g_{n_i} - g_{n_j}\| + \|g_{n_j} - e_j\| \le \|g_{n_i} - g_{n_j}\| + \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

d'où

$$\|g_{n_i} - g_{n_j}\| \ge \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

On en déduit que $g_{n_i} \ne g_{n_j}$ et donc que $n_i \ne n_j$. Ainsi pour tous i, j distincts dans I, $\varphi(i) \ne \varphi(j)$ ce qui exprime l'injectivité de φ. □

Remarque 7.8. La même démonstration prouve que si $\{e_i,\ i \in I\}$ est seulement une famille orthonormée dans H séparable, alors I est au plus dénombrable.

Proposition 7.9. *Soit H un espace de Hilbert ayant une base hilbertienne $\{e_i,\ i \in I\}$. Si $f \in H$ est orthogonale à tous les e_i, $i \in I$, alors $f = 0$. Ainsi une base hilbertienne est une famille orthonormée maximale pour l'inclusion.*

Démonstration. Comme $\{e_i,\ i \in I\}$ est totale dans H, pour tout ε, on peut trouver une combinaison linéaire finie $\sum_{j\in J} a_j e_j$ telle que

$$\Big\| f - \sum_{j\in J} a_j e_j \Big\| < \varepsilon. \tag{7.3}$$

D'autre part, l'orthogonalité de f à tous les e_j et l'orthonormalité de la famille finie $\{e_j,\ j \in J\}$ nous permettent d'écrire

$$\Big\| f - \sum_{j\in J} a_j e_j \Big\|^2 = \|f\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\Big\langle f, \sum_{j\in J} a_j e_j \Big\rangle + \sum_{j\in J} |a_j|^2 = \|f\|^2 + \sum_{j\in J} |a_j|^2.$$

Par conséquent $\|f\|^2 \le \big\| f - \sum_{j\in J} a_j e_j \big\|^2$. En reportant cette inégalité dans (7.3), on en déduit $\|f\| < \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout ε, $\|f\| = 0$ et $f = 0$. □

Corollaire 7.10. *Soit H un espace de Hilbert séparable et $\{e_i,\ i \in I\}$ une base hilbertienne. Alors ou bien H est de dimension finie et $\operatorname{card} I = \dim H$, ou bien H est de dimension infinie et I est exactement dénombrable (i.e. en bijection avec $\mathbb{N}$).*

Remarque 7.11. Dans ce qui suit, nous continuerons dans le cas où H est de dimension infinie et séparable, à indexer la base hilbertienne par I plutôt que par $\mathbb{N}$. Ce choix est motivé par l'existence d'exemples importants où la base est naturellement indexée par un I dénombrable autre que $\mathbb{N}$. C'est le cas notamment pour la base des exponentielles complexes de $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ avec $I = \mathbb{Z}$ (cf. théorème 7.25) et pour les bases d'ondelettes de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, où l'on peut prendre pour I l'ensemble des nombres dyadiques.

7.1.3 Meilleure approximation

Théorème 7.12. *Soit $\{e_i,\ i \in I\}$ une famille orthonormée de H. Alors pour tout $f \in H$, toute partie finie $J \neq \emptyset$ de I et tous scalaires a_j, $j \in J$,*

$$\Big\| f - \sum_{j\in J} c_j(f) e_j \Big\| \le \Big\| f - \sum_{j\in J} a_j e_j \Big\|, \tag{7.4}$$

avec

$$c_j(f) := \langle f, e_j \rangle. \tag{7.5}$$

L'égalité a lieu dans (7.4) si et seulement si $a_j = c_j(f)$ pour tout $j \in J$.

Démonstration. En appliquant la formule $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle$,

$$\begin{aligned}
\Big\| f - \sum_{j\in J} a_j e_j \Big\|^2 &= \Big\| \Big\{ f - \sum_{j\in J} c_j(f) e_j \Big\} + \Big\{ \sum_{j\in J} \big(c_j(f) - a_j\big) e_j \Big\} \Big\|^2 \\
&= \Big\| f - \sum_{j\in J} c_j(f) e_j \Big\|^2 + \Big\| \sum_{j\in J} \big(c_j(f) - a_j\big) e_j \Big\|^2 \\
&\quad + 2\,\mathrm{Re} \Big\langle f - \sum_{j\in J} c_j(f) e_j, \sum_{j\in J} \big(c_j(f) - a_j\big) e_j \Big\rangle.
\end{aligned}$$

Le terme $2\,\mathrm{Re}\langle \ldots, \ldots \rangle$ dans cette expression est nul car en développant le produit scalaire par rapport à son deuxième argument, on obtient

$$\sum_{k\in J} \overline{\big(c_k(f) - a_k\big)} \Big\langle f - \sum_{j\in J} c_j(f) e_j, e_k \Big\rangle = \sum_{k\in J} \overline{\big(c_k(f) - a_k\big)} \big(\langle f, e_k\rangle - c_k(f)\big) = 0.$$

D'autre part, grâce à l'orthonormalité des e_j on a

$$\Big\| \sum_{j\in J} \big(c_j(f) - a_j\big) e_j \Big\|^2 = \sum_{j\in J} |c_j(f) - a_j|^2.$$

Finalement

$$\begin{aligned}
\Big\| f - \sum_{j\in J} a_j e_j \Big\|^2 &= \Big\| f - \sum_{j\in J} c_j(f) e_j \Big\| + \sum_{j\in J} |c_j(f) - a_j|^2 \\
&\geq \Big\| f - \sum_{j\in J} c_j(f) e_j \Big\|^2,
\end{aligned}$$

l'égalité n'étant possible que si $\sum_{j\in J} |c_j(f) - a_j|^2 = 0$, autrement dit $c_j(f) = a_j$ pour tout $j \in J$. □

Interprétation géométrique : le vecteur $\pi_J(f) := \sum_{j\in J} c_j(f) e_j$ est la projection orthogonale de f sur le s.e.v. de dimension finie $E_J := \mathrm{Vect}\{e_j,\ j \in J\}$. Il est orthogonal à $f - \pi_J(f)$. Définissons la distance de f à E_J par

$$d(f, E_J) := \inf_{g\in E_J} \|f - g\|.$$

Le théorème 7.12 nous dit alors que cet infimum est un *minimum* et que ce minimum est atteint en l'unique point $g = \pi_J(f)$. Ainsi la projection orthogonale de f sur E_J est *la* meilleure approximation de f par un élément de E_J. Il est clair que ce résultat se généralise immédiatement avec n'importe quel sous-espace vectoriel de dimension finie de H puisqu'un tel espace possède toujours une base orthonormée et que seuls les e_j indexés par J ont été utilisés dans la preuve du théorème 7.12.

Corollaire 7.13. *Soit $\{e_i,\ i \in I\}$ une famille orthonormée de H. Alors pour tout $f \in H$, toutes parties finies $K \subset J$ non vides de I*

$$\Big\| f - \sum_{j \in J} c_j(f) e_j \Big\| \leq \Big\| f - \sum_{j \in K} c_j(f) e_j \Big\|. \tag{7.6}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 7.12 avec la suite finie $(a_j)_{j \in J}$ définie par $a_j := c_j(f)$ si $j \in K$, $a_j := 0$ si $j \in J \setminus K$. □

Théorème 7.14 (Inégalité de Bessel). *Si $\{e_i,\ i \in I\}$ est une famille orthonormée au plus dénombrable de H, alors*

$$\forall f \in H, \quad \sum_{i \in I} |\langle f, e_i \rangle|^2 \leq \|f\|^2. \tag{7.7}$$

Démonstration. Notons encore $c_i(f) := \langle f, e_i \rangle$, $i \in I$. Pour toute partie finie J de I,

$$\begin{aligned}
\Big\langle f - \sum_{j \in J} c_j(f) e_j, \sum_{j \in J} c_j(f) e_j \Big\rangle &= \sum_{k \in J} \overline{c_k(f)} \Big\langle f - \sum_{j \in J} c_j(f) e_j, e_k \Big\rangle \\
&= \sum_{k \in J} \overline{c_k(f)} \big(\langle f, e_k \rangle - c_k(f) \big) = 0.
\end{aligned}$$

Cette orthogonalité nous permet d'écrire

$$\|f\|^2 = \Big\| f - \sum_{j \in J} c_j(f) e_j \Big\|^2 + \Big\| \sum_{j \in J} c_j(f) e_j \Big\|^2 = \Big\| f - \sum_{j \in J} c_j(f) e_j \Big\|^2 + \sum_{j \in J} |c_j(f)|^2,$$

d'où

$$\sum_{j \in J} |c_j(f)|^2 \leq \|f\|^2.$$

Cette inégalité étant vraie pour toute partie finie J de I, on en déduit (7.7) en prenant le sup sur J. □

Corollaire 7.15. *Soit $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite orthonormée dans H et pour tout $f \in H$, $c_k(f) := \langle f, e_k \rangle$. La série*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(f) e_k \quad \textit{converge } \text{commutativement } \textit{dans } H. \tag{7.8}$$

La convergence commutative dans H se traduit par les conditions suivantes.

1. Il existe $g \in H$, telle que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \Big\| g - \sum_{k=0}^{n} c_k(f) e_k \Big\| = 0$.
2. Pour toute bijection $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \Big\| g - \sum_{k=0}^{n} c_{\tau(k)}(f) e_{\tau(k)} \Big\| = 0$.

Démonstration. Par l'inégalité de Bessel,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |c_k(f)|^2 \le \|f\|^2 < +\infty. \tag{7.9}$$

Cette série de réels positifs est donc convergente dans $\mathbb{R}_+$. La suite de ses sommes partielles vérifie le critère de Cauchy dans $\mathbb{R}_+$. En raison de l'orthonormalité de la suite (e_k), on a pour tous $n < m$ dans $\mathbb{N}$,

$$\Big\|\sum_{k=n}^{m} c_k(f)e_k\Big\|^2 = \sum_{k=n}^{m} |c_k(f)|^2.$$

On en déduit que la série *vectorielle* de terme général $c_k(f)e_k$ vérifie le critère de Cauchy dans H. Comme H est complet, elle converge donc (pour la distance de H) vers un élément g de H.

Soit maintenant une bijection $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Notons :

$$I_n := \{0, 1, 2, \dots, n\} \bigtriangleup \{\tau(0), \tau(1), \tau(2), \dots, \tau(n)\}, \quad m(n) := \min I_n,$$

où $\bigtriangleup$ est la différence symétrique ensembliste[1]. Par orthonormalité de la suite (e_k) et l'inégalité de Bessel, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Big\|\sum_{k=0}^{n} c_k(f)e_k - \sum_{k=0}^{n} c_{\tau(k)}(f)e_{\tau(k)}\Big\|^2 = \sum_{i\in I_n} |c_i(f)|^2 \le \sum_{i=m(n)}^{+\infty} |c_i(f)|^2.$$

Il ne reste alors plus qu'à voir que $m(n)$ tend vers l'infini avec n pour conclure par (7.9) que ce majorant tend vers 0. Fixons un entier quelconque K. La condition $m(n) > K$ est réalisée dès que tous les entiers $j \le K$ sont dans $\{\tau(0), \tau(1), \tau(2), \dots, \tau(n)\}$. Pour cela il suffit que $n \ge \max\{\tau^{-1}(j);\ 0 \le j \le K\} =: N(K)$. Ainsi $m(n)$ tend bien vers l'infini. □

7.1.4 Développement dans une base hilbertienne

Théorème 7.16. *Soit H un espace de Hilbert séparable.*

a) Si $\{e_i,\ i \in I\}$ est une base hilbertienne de H, on a le développement

$$\forall f \in H, \quad f = \sum_{i\in I} \langle f, e_i\rangle e_i, \tag{7.10}$$

où la série converge (commutativement) pour la topologie de H.

b) Si $\{e_i,\ i \in I\}$ est une famille orthonormée de H et si (7.10) est vérifiée, alors $\{e_i,\ i \in I\}$ est une base hilbertienne de H.

1. $A \bigtriangleup B := (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à *un seul* des deux ensembles A et B.

c) Si $\{e_i,\ i \in I\}$ *est une base hilbertienne de* H*, on a l'*identité de Plancherel :

$$\forall f \in H, \quad \|f\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle f, e_i\rangle|^2. \tag{7.11}$$

et celle de Parseval :

$$\forall f, g \in H, \quad \langle f, g\rangle = \sum_{i\in I} \langle f, e_i\rangle \overline{\langle g, e_i\rangle}. \tag{7.12}$$

d) Si $\{e_i,\ i \in I\}$ *est une famille de vecteurs unitaires de* H *(i.e.* $\forall i \in I$, $\|e_i\| = 1$*), vérifiant (7.11), alors c'est une base hilbertienne de* H*.*

Démonstration. Le cas I fini étant bien connu, on peut se restreindre pour la preuve au cas I infini. D'après le corollaire 7.15 et les propriétés des séries à termes positifs, il est clair que toutes les convergences intervenant dans l'énoncé du théorème sont commutatives (sauf peut-être (7.12) que nous traiterons à part). On est donc libre de choisir une numérotation particulière de l'ensemble dénombrable I (cf. le corollaire 7.10 et la remarque 7.8) pour faire la preuve du théorème. Pour alléger les notations, on identifiera carrément I et $\mathbb{N}$.

Preuve du a). Puisque par hypothèse $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est totale dans H, on peut construire un tableau triangulaire de scalaires $\{a_{n,j},\ n \in \mathbb{N},\ 0 \le j \le k_n\}$ tel que

$$f_n := \sum_{j=0}^{k_n} a_{n,j} e_j \xrightarrow[n\to+\infty]{H} f.$$

Posons avec $c_i(f) := \langle f, e_i\rangle$,

$$r_n := \Big\| f - \sum_{j=0}^{n} c_j(f) e_j \Big\|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Par la propriété de meilleure approximation (théorème 7.12), on a alors

$$0 \le r_{k_n} = \Big\| f - \sum_{j=0}^{k_n} c_j(f) e_j \Big\| \le \|f - f_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

La sous-suite de réels positifs (r_{k_n}) converge ainsi vers 0. D'autre part en raison du corollaire 7.13, (r_n) est décroissante. C'est donc *la suite* (r_n) *toute entière* qui converge vers 0. Ceci prouve la convergence dans H de la série $\sum_{j=0}^{+\infty} c_j(f) e_j$ vers f. Cette convergence est commutative en raison du corollaire 7.15.

Preuve du b). La convergence (7.10) signifie que

$$\forall f \in H, \quad \sum_{j=0}^{n} c_j(f) e_j \xrightarrow[n\to+\infty]{H} f,$$

ce qui implique que $\{e_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ est totale dans H. C'est donc bien une base hilbertienne.

Preuve du c). Si $\{e_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne, on a

$$\forall f \in H, \quad \sum_{k=0}^{n} c_k(f) e_k \xrightarrow[n\to+\infty]{H} f.$$

Par continuité de la norme sur H, on en déduit la convergence dans $\mathbb{R}_+$:

$$\Big\| \sum_{k=0}^{n} c_k(f) e_k \Big\|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|f\|^2. \tag{7.13}$$

Par orthonormalité des e_k,

$$\Big\| \sum_{k=0}^{n} c_k(f) e_k \Big\|^2 = \sum_{k=0}^{n} |c_k(f)|^2$$

et en reportant dans (7.13) on en déduit l'identité de Plancherel.

Montrons l'identité de Parseval. D'abord l'inégalité $|zz'| \leq |z|^2 + |z'|^2$ appliquée au terme général de la série (7.12) montre (via l'identité de Plancherel) que celle-ci est absolument convergente donc commutativement convergente. Par le a), on a les convergences :

$$\sum_{k=0}^{n} c_k(f) e_k \xrightarrow[n\to+\infty]{H} f, \quad \sum_{k=0}^{n} c_k(g) e_k \xrightarrow[n\to+\infty]{H} g.$$

Le produit scalaire étant une forme bilinéaire *continue* sur H (en raison de l'inégalité de Cauchy Schwarz), on en déduit :

$$\Big\langle \sum_{k=0}^{n} c_k(f) e_k, \sum_{k=0}^{n} c_k(g) e_k \Big\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle f, g\rangle. \tag{7.14}$$

Par orthonormalité des e_k et bilinéarité du produit scalaire, on a

$$\Big\langle \sum_{j=0}^{n} c_j(f) e_k, \sum_{k=0}^{n} c_k(g) e_k \Big\rangle = \sum_{j,k=0}^{n} c_j(f)\overline{c_k(g)}\langle e_j, e_k\rangle = \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\overline{c_k(g)}.$$

En reportant le résultat de ce calcul dans (7.14) on en déduit l'identité de Parseval.

Preuve du d). Supposons que les vecteurs e_k soient tous de norme 1 et que

$$\forall f \in H, \quad \|f\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle f, e_k\rangle|^2. \tag{7.15}$$

En choisissant $f = e_j$, cette identité nous donne

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \|e_j\|^2 = \|e_j\|^2 + \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k\neq j}} |\langle e_j, e_k\rangle|^2.$$

On en déduit que pour tout $k \neq j$, $\langle e_j, e_k \rangle = 0$. Ainsi $\{e_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ est orthonormée. Pour vérifier qu'elle est totale, on note (cf. la preuve de l'inégalité de Bessel) que

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} c_k(f) e_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |c_k(f)|^2$$

et que cette quantité tend vers 0 par (7.15). □

Proposition 7.17 (unicité du développement). *Soit $\{e_i,\ i \in I\}$ une base hilbertienne de l'espace de Hilbert séparable H et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires telle que la série $\sum_{i\in I} a_i e_i$ converge au sens de la topologie de H vers un $f \in H$ pour au moins une numérotation de l'ensemble dénombrable I. Alors $a_i = \langle f, e_i \rangle$ pour tout $i \in I$.*

Démonstration. Il est clair qu'il suffit de faire la preuve lorsque $I = \mathbb{N}$. Par hypothèse nous avons donc

$$f_n := \sum_{k=0}^{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{H} f.$$

D'autre part pour tous j et n dans $\mathbb{N}$, on a par orthonormalité des e_k :

$$\langle f_n, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } n < j, \\ a_j & \text{si } n \geq j. \end{cases}$$

La suite de complexes $(\langle f_n, e_j \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante égale à a_j à partir du rang j. Elle converge ainsi vers a_j.

D'autre part, $\langle\, .\, , e_j \rangle$ est une forme linéaire *continue* sur H (par Cauchy Schwarz) et f_n tend vers f pour la topologie de H. Donc

$$\langle f_n, e_j \rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle f, e_j \rangle.$$

Par unicité de la limite dans $\mathbb{C}$, on en déduit $a_j = \langle f, e_j \rangle$. □

Théorème 7.18 (Riesz-Fischer). *Tout espace de Hilbert de dimension infinie et séparable est isomorphe (isométriquement) à $\ell^2(\mathbb{N})$.*

Démonstration. Rappelons que l'espace $\ell^2(\mathbb{N})$ est l'espace des suites $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes telles que

$$\|u\|_2^2 := \sum_{k\in\mathbb{N}} |u_k|^2 < +\infty$$

et que c'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{\ell^2} := \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k \overline{v_k}.$$

Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie et séparable. Il possède alors une base hilbertienne exactement dénombrable (corollaire 7.10) que l'on peut toujours, quitte à la réindexer, écrire sous la forme $\{e_k,\ k \in \mathbb{N}\}$. On pose $c_k(f) := \langle f, e_k \rangle$ et on définit :

$$\Psi : H \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}), \quad f \longmapsto \big(c_k(f)\big)_{k\in\mathbb{N}}.$$

L'identité de Plancherel montre que $\Psi(f)$ est bien un élément de $\ell^2(\mathbb{N})$ et que Ψ est une isométrie :

$$\forall f \in H, \quad \|\Psi(f)\|_2 = \|f\|. \tag{7.16}$$

L'injectivité de Ψ en découle immédiatement. Par ailleurs, Ψ étant clairement linéaire, (7.16) implique aussi la continuité de Ψ. Il reste à vérifier la surjectivité de Ψ. Soit donc $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un élément quelconque de $\ell^2(\mathbb{N})$. Montrons l'existence d'un $f \in H$ tel que $\Psi(f) = u$. Définissons la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de H par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n := \sum_{k=0}^{n} u_k e_k.$$

Par orthonormalité des e_k, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \|f_{n+j} - f_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+j} |u_k|^2 \le \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On en déduit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans H. Comme H est complet, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite f dans H, ce qui s'écrit encore

$$f = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k e_k \quad \text{(série convergente pour la topologie de } H\text{)}.$$

Par la proposition 7.17, on a alors $u_k = c_k(f)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc $\Psi(f) = u$. □

7.2 Séries de Fourier

7.2.1 Espaces de fonctions 2π-périodiques

On note $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continues et 2π-périodiques. On le munit de la norme définie par :

$$\forall f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}), \quad \|f\|_\infty := \sup_{t\in[0,2\pi]} |f(t)| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|. \tag{7.17}$$

En raison de la 2π-périodicité, il est clair que l'on peut remplacer l'intervalle $[0, 2\pi]$ par n'importe quel intervalle de longueur 2π dans le supremum ci-dessus.

Proposition 7.19. *Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

Vérification. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc *uniformément* continue sur tout *compact* de $\mathbb{R}$, en particulier sur $[-2\pi, 2\pi]$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta \in]0, \pi[,\ \forall s, t \in [-2\pi, 2\pi], \quad |t - s| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(s)| < \varepsilon. \tag{7.18}$$

Par rapport à la définition classique de la continuité uniforme, la contrainte supplémentaire $\delta < \pi$ n'est évidemment pas restrictive et la raison de ce choix apparaîtra dans un instant. Fixons $\varepsilon > 0$ et un δ correspondant fourni par (7.18). Pour tous réels x et y tels que $|x - y| < \delta$, il existe un unique $k \in \mathbb{Z}$ tel que $s := x + 2k\pi$ appartienne à $[-\pi, \pi]$. Alors $t := y + 2k\pi$ est à une distance de s inférieure à $\delta < \pi$, donc t est dans $[-2\pi, 2\pi]$. Grâce à (7.18), à la 2π-périodicité de f et à l'égalité $|y - x| = |t - s|$, on a donc

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| = |f(t) - f(s)| < \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, la continuité uniforme de f sur $\mathbb{R}$ est établie. □

Dans toute la suite du chapitre, on désigne par m la mesure $\frac{1}{2\pi}\lambda$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Pour $1 \leq p < +\infty$, $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ est l'espace des fonctions mesurables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, telles que :

a) $f(t + 2\pi) = f(t)$, pour m-presque tout $t \in \mathbb{R}$;

b) $\int_{[0,2\pi]} |f|^p \,\mathrm{dm} < +\infty$.

La condition a) implique (vérification facile laissée au lecteur) que pour m-presque tout $t \in \mathbb{R}$, quel que soit $k \in \mathbb{Z}$, $f(t+2k\pi) = f(t)$. On peut aussi vérifier [2] que grâce au a) et à l'invariance de m par translation, on a pour tout réel c, $\int_{[0,2\pi]} |f|^p \,\mathrm{dm} = \int_{[c,c+2\pi]} |f|^p \,\mathrm{dm}$. On munit l'espace $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ de la semi-norme définie par :

$$\forall f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T}), \quad \|f\|_p := \left\{ \int_{[0,2\pi]} |f|^p \,\mathrm{dm} \right\}^{1/p} = \left\{ \int_{[c,c+2\pi]} |f|^p \,\mathrm{dm} \right\}^{1/p}, c \in \mathbb{R}. \tag{7.19}$$

Il s'agit bien d'une semi-norme (homogénéité et sous-additivité ont été vues au chapitre sur les espaces L^p) car la nullité de $\|f\|_p$ équivaut à la nullité de l'intégrale $\int_{[0,2\pi]} |f|^p \,\mathrm{dm}$, donc à la nullité m-presque partout sur $[0, 2\pi]$ de f et grâce à la condition a), à la nullité m-presque partout sur $\mathbb{R}$. Pour en faire une vraie norme, on passe au quotient de $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ par son sous-espace des fonctions nulles m-presque partout sur $\mathbb{R}$ et on définit ainsi l'espace $\mathrm{L}^p(\mathbb{T})$ des classes d'équivalences des éléments de $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ modulo l'égalité m-p.p.

Proposition 7.20. *Pour $1 \leq p \leq r < +\infty$, on a les inclusions topologiques :*

$$\mathcal{C}(\mathbb{T}) \hookrightarrow \mathrm{L}^r(\mathbb{T}) \hookrightarrow \mathrm{L}^p(\mathbb{T}) \hookrightarrow \mathrm{L}^1(\mathbb{T}). \tag{7.20}$$

Preuve. Cet énoncé comporte un léger abus de langage puisque la première inclusion n'en est pas une au sens ensembliste : les éléments de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ sont des vraies fonctions tandis que ceux de $\mathrm{L}^r(\mathbb{T})$ sont des classes d'équivalence. Néanmoins, on peut définir

2. Voir par exemple le corrigé de l'examen de juin dans les Annales d'I.F.P. 2001–2002.

une injection canonique $i : \mathcal{C}(\mathbb{T}) \to \mathrm{L}^r(\mathbb{T})$ en associant à toute $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ sa classe $\tilde{f}$ modulo l'égalité m presque partout. Si f est continue, elle est bornée sur $[0, 2\pi]$, donc $\int_{[0,2\pi]} |f|^r \,\mathrm{dm} < +\infty$ car m est finie (sur $[0, 2\pi]$). La condition a) étant évidememnt vérifiée, f appartient à $\mathcal{L}^r(\mathbb{T})$. Donc $\tilde{f}$ est bien un élément de L^r et i est une application $\mathcal{C}(\mathbb{T}) \to \mathrm{L}^r(\mathbb{T})$. Vérifions qu'elle est injective. Si f et g sont deux éléments distincts de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, l'ensemble $A := \{t \in [0, 2\pi];\ f(t) \neq g(t)\}$ est un *ouvert* non vide de $[0, 2\pi]$, en raison de la continuité de $f - g$. Or un ouvert non vide de $[0, 2\pi]$ ne peut être de mesure de Lebesgue nulle (il contient au moins un intervalle ouvert de longueur non nulle), donc $\mathrm{m}(A) > 0$ et ceci empêche f d'être égale m-p.p. à g, d'où $\tilde{f} \neq \tilde{g}$ et i est bien injective. La linéarité de i étant évidente, il ne reste plus qu'à vérifier sa continuité en notant que :

$$\forall f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}), \quad \|i(f)\|_r = \left\{ \int_{[0,2\pi]} |f|^r \,\mathrm{dm} \right\}^{1/r} \leq \left\{ \int_{[0,2\pi]} \|f\|_\infty^r \,\mathrm{dm} \right\}^{1/r} = \|f\|_\infty.$$

La première inclusion topologique dans (7.20) est ainsi établie. Les autres ne sont qu'une réécriture du théorème 6.18, puisque m est une mesure finie. □

7.2.2 Coefficients de Fourier

Définition 7.21. *Notons* $\mathsf{E} := \{e_n;\ n \in \mathbb{Z}\}$, *la famille des fonctions*

$$e_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad e_n(t) := \mathrm{e}^{int}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{7.21}$$

Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$, *on appelle* n*-ième coefficient de Fourier de* f, *le nombre complexe*

$$c_n(f) := \int_{[0,2\pi]} f\overline{e_n} \,\mathrm{dm} = \int_{[0,2\pi]} f(t)\mathrm{e}^{-int} \,\mathrm{dm}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} f(t)\mathrm{e}^{-int} \,\mathrm{d}\lambda(t).$$

La série formelle $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n$ *est appelée* série de Fourier *de* f.

Remarques 7.22.
1. Les $c_n(f)$ étant définis par des intégrales relativement à la mesure m, ne dépendent pas du choix du représentant de f modulo l'égalité m-p.p., il est donc légitime de parler de série de Fourier d'un élément de $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$.
2. Nous ne prétendons pas que la série de Fourier de f converge vers f. La question que nous nous proposons d'étudier est précisément : « sous quelles hypothèses relatives à f et pour quel forme de convergence peut-on dire que f est la somme de sa série de Fourier ? »
3. Si $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T})$, les $c_n(f)$ s'interprètent comme les produits scalaires :

$$c_n(f) = \langle f, e_n \rangle. \tag{7.22}$$

L'interprétation des $c_n(f)$ comme produits scalaires est limitée aux $f \in \mathrm{L}^2$. Voici une relation plus générale, basée sur les produits de convolution, qui nous sera utile dans la suite.

Proposition 7.23. *Pour toute* $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad f * e_n = c_n(f) e_n, \tag{7.23}$$

le produit de convolution étant défini ici par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * e_n)(x) := \int_{[0,2\pi]} f(t) e_n(x-t) \, \mathrm{dm}(t).$$

Vérification. L'égalité (7.23) s'obtient simplement en écrivant pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(f * e_n)(x) = \int_{[0,2\pi]} f(t) \mathrm{e}^{inx} \mathrm{e}^{-int} \, \mathrm{dm}(t) = \left\{ \int_{[0,2\pi]} f(t) \mathrm{e}^{-int} \, \mathrm{dm}(t) \right\} \mathrm{e}^{inx} = c_n(f) e_n(x).$$

□

7.2.3 Bases trigonométriques de $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$

Proposition 7.24. $\mathsf{E} = \{e_n;\ n \in \mathbb{Z}\}$ *est une famille orthonormée de* $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$.

Vérification. Par conversion en intégrale de Riemann de l'intégrale de Lebesgue de la fonction continue $e_k \overline{e_l}$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, on a en effet pour tous k, $l \in \mathbb{Z}$,

$$\langle e_k, e_l \rangle = \int_{[0,2\pi]} e_k \overline{e_l} \, \mathrm{dm} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ikt} \mathrm{e}^{-ilt} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(k-l)t} \, \mathrm{d}t.$$

Si $k \neq l$, une primitive de $\mathrm{e}^{i(k-l)t}$ est $\frac{1}{i(k-l)} \mathrm{e}^{i(k-l)t}$, dont la variation entre 0 et 2π est nulle par périodicité. Si $k = l$, la fonction $\mathrm{e}^{i(k-l)t}$ est la constante 1 et $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \, dt = 1$. Finalement,

$$\langle e_k, e_l \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l, \\ 0 & \text{si } k \neq l, \end{cases}$$

la famille E est donc orthonormée. □

Théorème 7.25. $\mathsf{E} = \{e_n;\ n \in \mathbb{Z}\}$ *est une base hilbertienne de* $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$. *On a donc le développement :*

$$\forall f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T}), \quad f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e_k, \tag{7.24}$$

avec convergence commutative de cette série pour la topologie de $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$. *En particulier on a*

$$S_n(f) := \sum_{k=-n}^{k=+n} c_k(f) e_k \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathrm{L}^2(\mathbb{T})} f, \tag{7.25}$$

ce qui se traduit par :

$$\int_{[0,2\pi]} \left| S_n(f) - f \right|^2 \mathrm{dm} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0. \tag{7.26}$$

Remarque 7.26. Une autre façon d'énoncer (7.24) est de dire que la série de Fourier de toute fonction de $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ converge vers f au sens L^2. Insistons à nouveau sur le fait que (7.24) ne signifie aucunement que $f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e_k(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Du point de vue de la convergence ponctuelle, tout ce que l'on peut tirer de (7.25) en l'état actuel de nos connaissances, est l'existence d'une sous-suite $\big(S_{n_j}(f)(t)\big)$ qui converge λ presque partout vers $f(t)$ (en notant encore f un représentant quelconque de la classe f).

Preuve du théorème 7.25. Nous savons déjà que E est orthonormée, il reste à montrer qu'elle est totale dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ (cf. les définitions 7.3 et 7.5).

Admettons provisoirement que E est totale dans l'espace $\big(\mathcal{C}(\mathbb{T}), \|\ \|_\infty\big)$. Cette propriété sera établie ci-dessous comme une conséquence immédiate du théorème de Fejér dont la démonstration est indépendante du théorème 7.25.

Soit $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ et notons encore f un de ses représentants (une vraie fonction). Il s'agit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une combinaison linéaire finie h_ε des e_k telle que $\|f - h_\varepsilon\|_2 < \varepsilon$.

Par densité de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ (pour la distance euclidienne associée à $\|\ \|_2$), on peut trouver une fonction $g_\varepsilon \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ telle que $\|f - g_\varepsilon\|_2 < \varepsilon/2$. Comme E est totale dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, on peut approcher à $\varepsilon/2$ près (au sens cette fois de la distance associée à $\|\ \|_\infty$) par une combinaison linéaire finie h_ε des e_k : $\|g_\varepsilon - h_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon/2$.

En utilisant l'inclusion topologique de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ (cf. 7.20), on peut alors contrôler la norme L^2 de la fonction continue $g_\varepsilon - h_\varepsilon$:

$$\|g_\varepsilon - h_\varepsilon\|_2 \le \|g_\varepsilon - h_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon/2.$$

Finalement en appliquant l'inégalité triangulaire dans L^2 on obtient :

$$\|f - h_\varepsilon\|_2 \le \|f - g_\varepsilon\|_2 + \|g_\varepsilon - h_\varepsilon\|_2 < \varepsilon.$$

Comme f et ε étaient quelconques, E est bien totale dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$. □

Corollaire 7.27 (Bessel, Plancherel, Parseval). *Pour toutes f, $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T})$, on a*

a) Inégalité de Bessel : pour tout $J \subset \mathbb{Z}$,

$$\sum_{k\in J}\left|\int_{[0,2\pi]} f(t)\mathrm{e}^{-ikt}\,\mathrm{dm}(t)\right|^2 \le \int_{[0,2\pi]} |f|^2\,\mathrm{dm}.$$

b) Identité de Plancherel :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\int_{[0,2\pi]} f(t)\mathrm{e}^{-ikt}\,\mathrm{dm}(t)\right|^2 = \int_{[0,2\pi]} |f|^2\,\mathrm{dm}.$$

b) Identité de Parseval :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{[0,2\pi]} f(t)\mathrm{e}^{-ikt}\,\mathrm{dm}(t)\int_{[0,2\pi]} \overline{g(t)}\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{dm}(t) = \int_{[0,2\pi]} f\overline{g}\,\mathrm{dm}.$$

Vérification. Ce corollaire est une simple traduction des théorèmes 7.14 et 7.16 c) avec pour espace de Hilbert $H = \mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ et comme base hilbertienne $\{e_k;\ k \in I\}$, la famille des e_n définies par (7.21), $I = \mathbb{Z}$. $\square$

Corollaire 7.28. *La famille* $\mathsf{F} := \{1\} \cup \{\sqrt{2}\cos(k\,.\,),\ \sqrt{2}\sin(k\,.\,),\ k \in \mathbb{N}^*\}$ *est une base hilbertienne de* $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$*. On a pour toute* $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T})$*, la décomposition en série commutativement convergente au sens* L^2 *:*

$$f = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}\bigl(a_k\cos(k\,.\,) + b_k\sin(k\,.\,)\bigr), \tag{7.27}$$

où les coefficients $a_k = a_k(f)$ *et* $b_k = b_k(f)$ *sont définis par*

$$a_k := \frac{1}{\pi}\int_{[0,2\pi]} f(t)\cos kt\,\mathrm{d}\lambda(t), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{7.28}$$

$$b_k := \frac{1}{\pi}\int_{[0,2\pi]} f(t)\sin kt\,\mathrm{d}\lambda(t), \quad k \in \mathbb{N}^*. \tag{7.29}$$

Preuve. L'orthonormalité de la famille F résulte d'un calcul classique laissé au lecteur. Pour prouver que F est totale dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$, on utilise pour f quelconque dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ la convergence (7.26) de $\|S_n(f) - f\|_2$ vers 0. Il suffit alors de vérifier que pour chaque n, $S_n(f)$ est une combinaison linéaire finie de fonctions de la famille F. Ceci résulte du calcul élémentaire suivant :

$$\begin{aligned}
S_n(f)(x) &= \sum_{k=-n}^{k=n} c_k(f)e_k(x)\\
&= c_0(f) + \sum_{k=1}^{n}\bigl\{c_k(f)e_k(x) + c_{-k}(f)e_{-k}(x)\bigr\}\\
&= c_0(f) + \sum_{k=1}^{n}\bigl\{c_k(f)(\cos kx + i\sin kx) + c_{-k}(f)(\cos kx - i\sin kx)\bigr\}\\
&= c_0(f) + \sum_{k=1}^{n}\bigl\{\bigl(c_k(f) + c_{-k}(f)\bigr)\cos kx + i\bigl(c_k(f) - c_{-k}(f)\bigr)\sin kx\bigr\}.
\end{aligned}$$

Ainsi F est une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$. Le développement de f dans cette base s'écrit :

$$f = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}\bigl(\alpha_k\sqrt{2}\cos(k\,.\,) + \beta_k\sqrt{2}\sin(k\,.\,)\bigr), \tag{7.30}$$

série commutativement convergente dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$, avec les coefficients définis par :

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &:= \langle f, 1\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} f(t)\,\mathrm{d}\lambda(t) = \frac{a_0}{2},\\
\alpha_k &:= \langle f, \sqrt{2}\cos(k\,.)\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} f(t)\cos kt\,\mathrm{d}\lambda(t) = \frac{a_k}{\sqrt{2}}, \quad k\in\mathbb{N}^*,\\
\beta_k &:= \langle f, \sqrt{2}\sin(k\,.)\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} f(t)\sin kt\,\mathrm{d}\lambda(t) = \frac{b_k}{\sqrt{2}}, \quad k\in\mathbb{N}^*.
\end{aligned}$$

En reportant ces valeurs dans (7.30), on obtient le développement (7.27). □

Remarque 7.29. Les fonctions qui interviennent dans le développement (7.27) sont orthogonales, mais pas orthonormées. Il faut y prendre garde si l'on veut écrire l'analogue du corollaire 7.27 avec les coefficients a_k, b_k. Pour le faire proprement, il faut repasser par les α_k et les β_k. Par exemple on obtient ainsi pour l'identité de Parseval :

$$\forall f,g\in\mathrm{L}^2(\mathbb{T}),\qquad \int_{[0,2\pi]} f\overline{g}\,\mathrm{dm} = \frac{1}{4}a_0(f)\overline{a_0(g)} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\bigl(a_k(f)\overline{a_k(g)} + b_k(f)\overline{b_k(g)}\bigr).$$

Remarque 7.30. Si f est à valeurs réelles, les sommes partielles $S_n(f)$ et leur analogues pour la base F sont des fonctions à valeurs réelles. Il suffit de le vérifier pour $S_n(f)$ puisque :

$$\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n}\bigl(\alpha_k\sqrt{2}\cos(k\,.) + \beta_k\sqrt{2}\sin(k\,.)\bigr) = c_0(f) + \sum_{k=1}^{n}\bigl\{c_k(f)e_k + c_{-k}(f)e_{-k}\bigr\} = S_n(f).$$

Or pour toute $g\in\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$, même à valeurs complexes, on a $\overline{c_k(g)} = c_{-k}(\overline{g})$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$. Comme f est réelle, $f=\overline{f}$, d'où pour tout $k\in\mathbb{Z}$, les égalités

$$c_k(f)e_k + c_{-k}(f)e_{-k} = c_k(f)e_k + c_{-k}(\overline{f})e_{-k} = c_k(f)e_k + \overline{c_k(f)}\,\overline{e_k} = 2\operatorname{Re}\bigl(c_k(f)e_k\bigr),$$

dont on déduit que $S_n(f)$ est à valeurs réelles.

Exemple 7.2. Soit f la fonction 2π périodique dont la restriction à $[-\pi,\pi]$ coïncide avec la fonction $\mathbf{1}_{[-\pi/2,\pi/2]}$. Un calcul immédiat nous donne

$$c_0(f) = \frac{1}{2},\qquad c_k(f) = \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi},\qquad k\in\mathbb{Z}^*.$$

Les sommes partielles $S_n(f)$ sont réelles et peuvent s'écrire pour tout $n\geq 1$,

$$S_n(f) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(k\pi/2)}{k}\cos kx.$$

Les figures 7.1 et 7.2 présentent une représentation graphique de $S_{13}(f)$ et $S_{199}(f)$. On

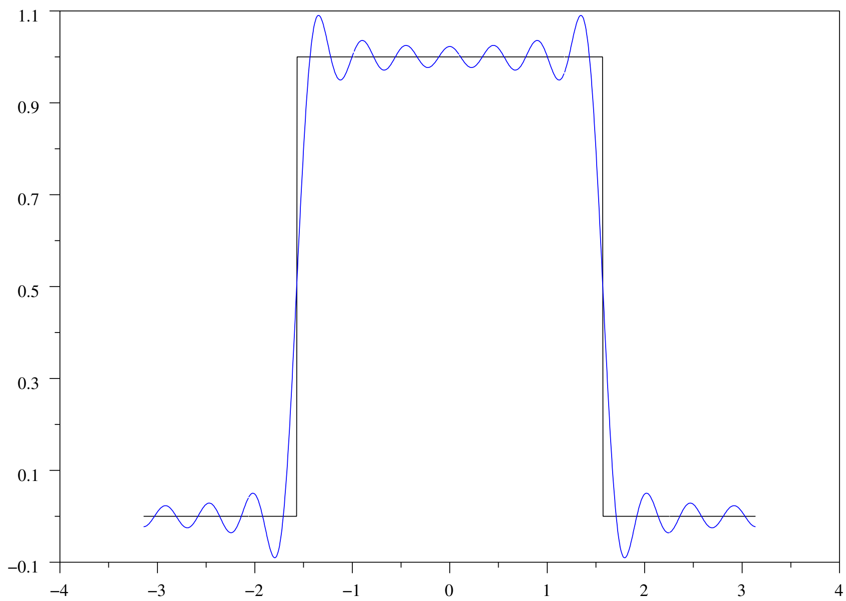

FIG. 7.1 – $S_{13}(f)$ pour $f = \mathbf{1}_{[-\pi/2,\pi/2]}$

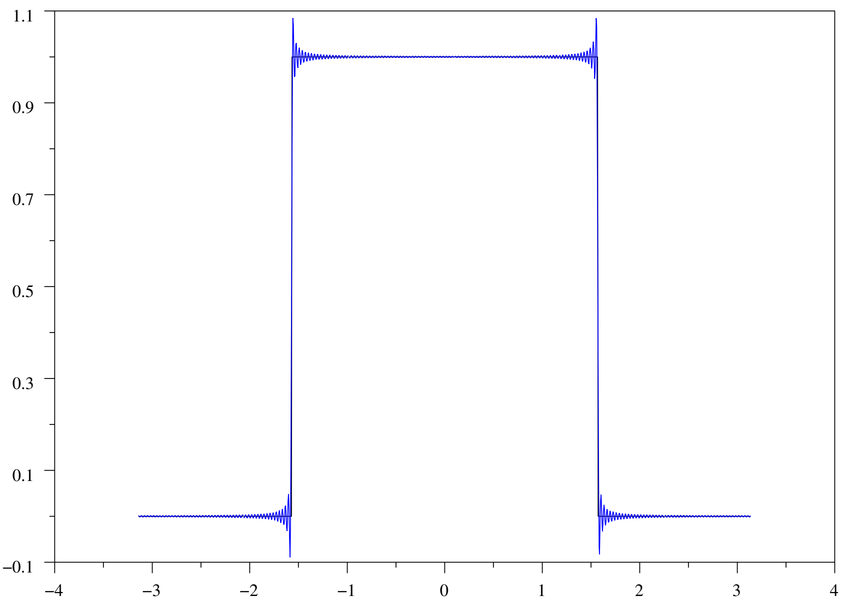

FIG. 7.2 – $S_{199}(f)$ pour $f = \mathbf{1}_{[-\pi/2,\pi/2]}$

voit bien sur la figure 7.2 la convergence L^2 de $S_n(f)$ vers f. On voit aussi le mauvais comportement de $S_n(f)$ du point de vue de la convergence ponctuelle aux points de discontinuité $-\pi/2$ et $\pi/2$. Il est d'ailleurs facile de voir directement que $S_n(f)(\pi/2)$ ne converge pas vers $f(\pi/2) = 1$ puisque

$$S_n(f)(\pi/2) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\pi/2)\cos(k\pi/2)}{k} = \frac{1}{2}.$$

Pour un oeil averti, la figure 7.2 illustre aussi le « phénomène de Gibbs ». On désigne ainsi le résultat suivant.

> *Soit f une fonction 2π périodique et C^1 par morceaux (les raccords n'étant pas nécessairement continus). Si x_0 est un point de discontinuité de f, $S_n(f)(x_0)$ converge vers $\frac{1}{2}(f(x_0^+) + f(x_0^-))$. Néanmoins, pour chaque n le maximum sur $]x_0 - c/n, x_0[$ (resp. sur $]x_0, x_0 + c/n[$) de $|S_n(f)(x) - f(x_0^-)|$ (resp. de $|S_n(f)(x) - f(x_0^+)|$) ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Il est asymptotiquement de l'ordre d'environ 9% du saut $|f(x_0^+) - f(x_0^-)|$.*

Après cette digression sur la convergence ponctuelle, revenons au point de vue L^2 et regardons ce que donne sur notre exemple l'identité de Plancherel. Compte-tenu de la valeurs des $c_k(f)$, celle ci s'écrit ici

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2 = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(k\pi/2)}{k^2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(2j+1)^2}.$$

D'autre part le calcul direct de $\|f\|_2^2$ s'écrit

$$\|f\|_2^2 = \int_{[-\pi,\pi]} |f|^2 \,\mathrm{dm} = \frac{1}{2}.$$

Par comparaison des deux résultats, on en déduit

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Cette formule permet de retrouver la valeur de $\zeta(2) := \sum_{n\geq 1} n^{-2}$. En effet

$$\zeta(2) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{(2j)^2} + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{1}{4}\zeta(2) + \frac{\pi^2}{8},$$

d'où $(1 - 1/4)\zeta(2) = \pi^2/8$, puis $\zeta(2) = \pi^2/6$.

7.2.4 Noyaux de Dirichlet et de Fejér

Nous venons de voir que la série de Fourier d'une fonction $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ se comporte bien dans cet espace, c'est-à-dire converge pour la topologie de cet espace vers

$f : \|S_n(f) - f\|_2 \to 0$. La même question concernant l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ est naturelle et même antérieure. Malheureusement la réponse est négative. Il existe des fonctions continues f 2π-périodiques dont la série de Fourier diverge en certains points, donc ne peut converger uniformément vers f (la convergence au sens de l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ est la convergence uniforme sur $[0, 2\pi]$, donc aussi sur $\mathbb{R}$ par périodicité). Nous verrons ci-dessous qu'un remède à ce mauvais comportement de $S_n(f)$ dans l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ est de remplacer la convergence de la suite $(S_n(f))$ par celle de ses moyennes arithmétiques (convergence au sens de Césaro). Avant d'en arriver là, il nous faut en passer par les quelques préliminaires techniques contenus dans cette sous-section.

Définition 7.31. *On appelle* noyau de Dirichlet d'ordre n *la fonction :*

$$D_n := \sum_{k=-n}^{k=n} e_k, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{7.31}$$

L'intérêt de ce noyau D_n est qu'il permet d'écrire la somme partielle $S_n(f)$ de la série de Fourier d'une $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ comme le produit de convolution

$$S_n(f) = f * D_n = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} f(t) D_n(\,.\, - t)\,\mathrm{d}\lambda(t), \tag{7.32}$$

transformant ainsi l'étude de la convergence de la série de Fourier en un problème de convergence d'intégrale. La justification de (7.32) est le calcul suivant qui utilise la proposition 7.23 et la distributivité du produit de convolution d'une fonction de L^1 par rapport à l'addition de fonctions de L^∞ (qui résulte elle même de la linéarité de l'intégrale) :

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{k=n} c_k(f) e_k = \sum_{k=-n}^{k=n} f * e_k = f * \left(\sum_{k=-n}^{k=n} e_k \right) = f * D_n.$$

Proposition 7.32. *Soit D_n le noyau de Dirichlet d'ordre n.*

a) Son intégrale sur une période ne dépend pas de n :

$$\int_{[-\pi,\pi]} D_n \,\mathrm{dm} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

b) La fonction continue 2π-périodique D_n a pour expression explicite :

$$D_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin\big((n+1/2)t\big)}{\sin(t/2)} & \text{si } t \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ 2n+1 & \text{si } t \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

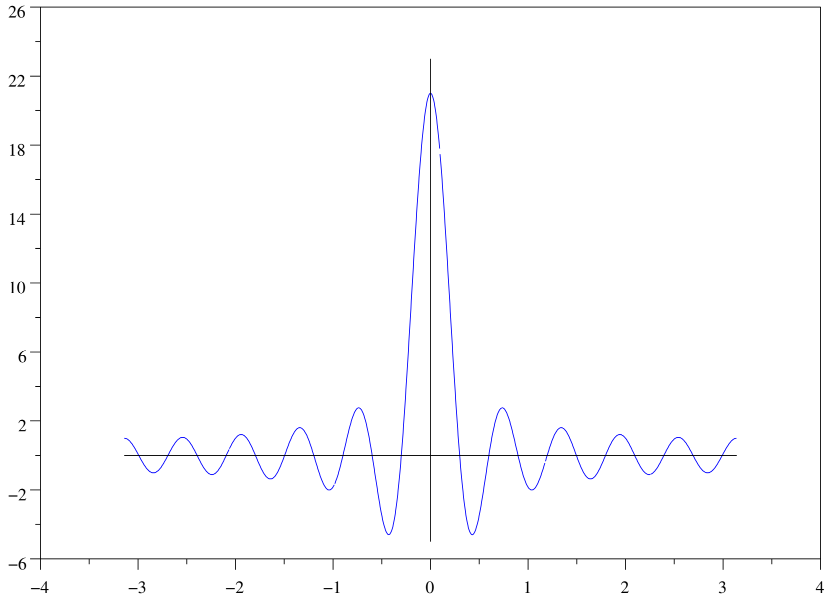

Fig. 7.3 – Noyau de Dirichlet D_{10} sur $[-\pi, \pi]$

Vérification. Pour le a), il suffit de revenir à la définition de D_n et de remarquer que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e_0(t)\,\mathrm{d}t = 1$ et si $k \neq 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} e_k(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Pour le b), si $t \in 2\pi\mathbb{Z}$, on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $e_k(t) = e_k(0) = 1$, d'où $D_n(t) = \sum_{k=-n}^{k=n} e_k(t) = 2n+1$. Si $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a $\mathrm{e}^{it} \neq 1$ et on peut calculer $D_n(t)$ comme la somme d'une suite géométrique de raison e^{it} :

$$\begin{aligned} D_n(t) = \mathrm{e}^{-int}\sum_{k=0}^{2n} \mathrm{e}^{ikt} = \mathrm{e}^{-int}\frac{\mathrm{e}^{(2n+1)it}-1}{\mathrm{e}^{it}-1} &= \frac{\mathrm{e}^{(n+1)it}-\mathrm{e}^{-nit}}{\mathrm{e}^{it/2}\big(\mathrm{e}^{it/2}-\mathrm{e}^{-it/2}\big)} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{(n+1/2)it}-\mathrm{e}^{-(n+1/2)it}}{\mathrm{e}^{it/2}-\mathrm{e}^{-it/2}} \\ &= \frac{\sin\big((n+1/2)t\big)}{\sin(t/2)}. \end{aligned}$$

Notons au passage que la limite de cette expression lorsque t tend vers 0 (ou vers $2j\pi$) est exactement $2n+1$, ce qui concorde avec la continuité de D_n, évidente directement puisque D_n est une somme finie de fonctions e_k. $\square$

Définition 7.33 (Sommes de Fejér). *Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$, on appelle* somme de Fejér *de rang n de f, la moyenne arithmétique des n premières sommes partielles de sa série de Fourier :*

$$\sigma_n(f) := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} S_j(f), \quad n \in \mathbb{N}^*. \tag{7.33}$$

À nouveau, on peut exprimer $\sigma_n(f)$ comme un produit de convolution

$$\sigma_n(f) = f * K_n = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(t)K_n(\,.-t)\,\mathrm{d}\lambda(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(\,.-t)K_n(t)\,\mathrm{d}\lambda(t), \tag{7.34}$$

grâce au calcul élémentaire suivant qui exploite (7.32) :

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f * D_j = f * \left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} D_j\right).$$

Définition 7.34. *On appelle* noyau de Fejér *d'ordre n ($n \geq 1$) la fonction*

$$K_n := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} D_j.$$

Proposition 7.35 (Propriétés du noyau de Fejér).

i) $K_n = \displaystyle\sum_{k=-n}^{k=n}\Big(1-\frac{|k|}{n}\Big)e_k.$

ii) $\forall f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T}), \quad \sigma_n(f) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{k=n}\Big(1-\frac{|k|}{n}\Big)c_k(f)e_k.$

iii) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{[-\pi,\pi]} K_n \,\mathrm{dm} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,\mathrm{d}t = 1.$

iv) Pour $t \in 2\pi\mathbb{Z}$, $K_n(t) = K_n(0) = n$ *et*

$$\forall t \notin 2\pi\mathbb{Z}, \quad K_n(t) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^2.$$

En conséquence, K_n *est positif et compte-tenu de iii), c'est une densité de probabilité sur* $[-\pi,\pi]$ *par rapport à* m.

v) $\|K_n\|_1 = 1$.

vi) $\forall \delta \in]0,\pi]$, $\quad I_n(\delta) := \displaystyle\int_{\{\delta\le|t|\le\pi\}} K_n\,\mathrm{dm} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Preuve. L'égalité i) s'obtient par la sommation triangulaire suivante :

$$\begin{aligned} nK_n = \sum_{j=0}^{n-1} D_j = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{|k|\le j} e_k &= \sum_{\substack{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}\\ |k|\le j\le n-1}} e_k \\ &= \sum_{|k|\le n-1} e_k \operatorname{card}\{j\in\mathbb{N};\ |k|\le j\le n-1\} \\ &= \sum_{|k|\le n-1}(n-|k|)e_k = \sum_{|k|\le n}(n-|k|)e_k. \end{aligned}$$

L'égalité ii) est une conséquence immédiate de i), (7.34) et (7.23).

Pour vérifier iii), on utilise simplement la définition de K_n, la proposition 7.32 a) et la linéarité de l'intégrale :

$$\int_{[-\pi,\pi]} K_n\,\mathrm{dm} = \int_{[-\pi,\pi]}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} D_j\right)\mathrm{dm} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\int_{[-\pi,\pi]} D_j\,\mathrm{dm} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} 1 = 1.$$

Vérifions maintenant la formule explicite iv) pour K_n. Si $t \in 2\pi\mathbb{Z}$, $K_n(t) = K_n(0)$ par 2π périodicité de K et le calcul de $K_n(0)$ est celui de la somme d'une progression arithmétique[3]

$$K_n(0) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} D_j(0) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(2j+1) = \frac{1}{n}\times n\times\frac{1+(2n-1)}{2} = n.$$

Si $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on utilise à nouveau un calcul de somme d'une progression géométrique de raison $\mathrm{e}^{it} \neq 1$. En effet, grâce à la définition de K_n et à la proposition 7.32 b), on peut

3. Il est bien connu que cette somme est égale au produit du nombre de termes multiplié par la moyenne du premier et du dernier termes.

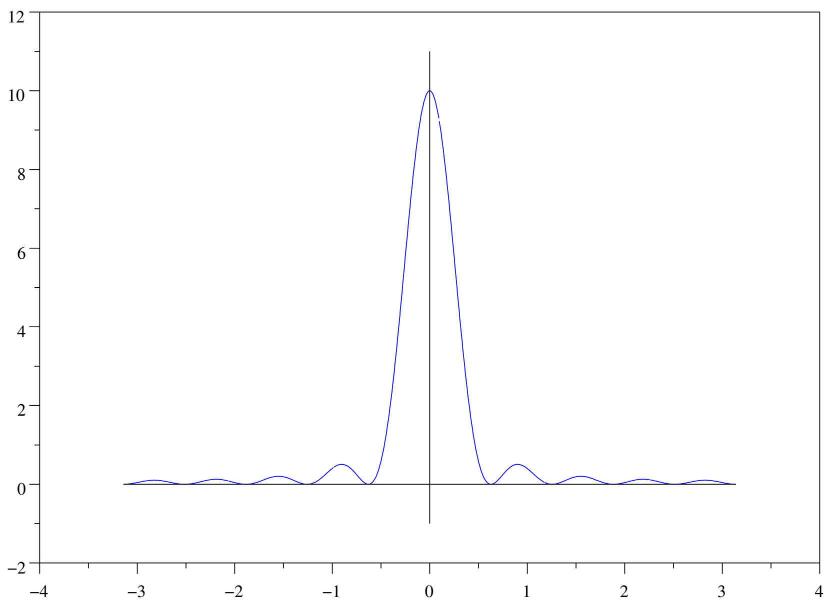

FIG. 7.4 – Noyau de Fejér K_{10} sur $[-\pi, \pi]$

écrire :

$$\begin{aligned} nK_n(t) = \sum_{j=0}^{n-1} D_j(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\sin\bigl((j+1/2)t\bigr)}{\sin(t/2)} &= \frac{1}{\sin(t/2)} \sum_{j=0}^{n-1} \operatorname{Im}\bigl(\mathrm{e}^{ijt}\mathrm{e}^{it/2}\bigr) \\ &= \frac{1}{\sin(t/2)} \operatorname{Im}\left\{\frac{\mathrm{e}^{int}-1}{\mathrm{e}^{it}-1}\mathrm{e}^{it/2}\right\} \\ &= \frac{1}{\sin(t/2)} \operatorname{Im}\left\{\mathrm{e}^{int/2}\frac{\mathrm{e}^{int/2}-\mathrm{e}^{-int/2}}{\mathrm{e}^{it/2}-\mathrm{e}^{-it/2}}\right\} \\ &= \frac{1}{\sin(t/2)} \operatorname{Im}\left\{\mathrm{e}^{int/2}\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right\} \\ &= \frac{\sin^2(nt/2)}{\sin^2(t/2)}. \end{aligned}$$

L'égalité v) est une conséquence immédiate de iii) et de la positivité de K_n via iv).

Enfin pour établir vi), la parité et la continuité de K_n nous permettent d'écrire $I_n(\delta)$ comme l'intégrale de Riemann

$$I_n(\delta) = \frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi K_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Lorsque t décrit $[\delta,\pi]$, $t/2$ décrit $[\delta/2,\pi/2]$ et par croissance de la fonction $\sin^2$ sur cet intervalle, on a la minoration :

$$\forall t \in [\delta,\pi], \quad \sin^2(t/2) \geq \sin^2(\delta/2).$$

Grâce à iv), on en déduit la majoration :

$$0 \leq I_n(\delta) = \frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi \frac{\sin^2(nt/2)}{n\sin^2(t/2)}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi \frac{1}{n\sin^2(\delta/2)}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n\sin^2(\delta/2)}.$$

Ce majorant tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ ($\delta > 0$ restant fixé). Ceci achève la preuve de la proposition 7.35. □

Remarque 7.36. On peut donner une interprétation de la propriété vi) du noyau de Fejér en disant que la mesure de probabilité μ_n sur $[-\pi,\pi]$, de densité K_n par rapport à m, converge quand n tend vers l'infini vers la masse de Dirac au point 0. Nous reviendrons ultérieurement sur la question de la convergence des mesures.

7.2.5 Le théorème de Fejér

Théorème 7.37 (Fejér). *Si f est continue 2π-périodique, ses sommes de Fejér $\sigma_n(f)$ convergent uniformément vers f sur $[-\pi,\pi]$ (donc aussi sur $\mathbb{R}$) :*

$$\forall f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}), \quad \|\sigma_n(f) - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Démonstration. Grâce à (7.34) et à la proposition 7.35 iii), on peut écrire la différence $\sigma_n(f) - f$ sous forme intégrale :

$$\sigma_n(f)(x) - f(x) = (f * K_n)(x) - f(x)\int_{[-\pi,\pi]} K_n \,\mathrm{dm} = \int_{[-\pi,\pi]} \big(f(x-t) - f(x)\big) K_n(t)\,\mathrm{dm}(t).$$

On en déduit la majoration :

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad \big|\sigma_n(f)(x) - f(x)\big| \leq \int_{[-\pi,\pi]} |f(x-t) - f(x)| K_n(t)\,\mathrm{dm}(t). \tag{7.35}$$

Par la proposition 7.19, la fonction continue 2π-périodique f est *uniformément* continue sur tout $\mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ |u - v| \leq \delta \Rightarrow |f(u) - f(v)| \leq \varepsilon. \tag{7.36}$$

Fixons $\varepsilon > 0$. On peut toujours imposer au δ fourni par (7.36) d'être inférieur à π. Découpons l'intégrale dans (7.35) selon $|t| < \delta$ et $\delta \leq |t| \leq \pi$. On majore $\int_{|t|<\delta}$ en appliquant (7.36) avec $u = x - t$ et $v = x$. Pour l'intégrale $\int_{\delta \leq |t| \leq \pi}$, il n'y a pas d'espoir que $|f(x-t) - f(x)|$ soit petit et on le majore brutalement[4] par $2\|f\|_\infty$.

$$\begin{aligned}
\big|\sigma_n(f)(x) - f(x)\big| &\leq \int_{[-\delta,\delta]} \varepsilon K_n(t)\,\mathrm{dm}(t) + \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} 2\|f\|_\infty K_n(t)\,\mathrm{dm}(t) \\
&\leq \varepsilon \int_{[-\pi,\pi]} K_n\,\mathrm{dm} + 2\|f\|_\infty I_n(\delta) \qquad (7.37) \\
&= \varepsilon + 2\|f\|_\infty I_n(\delta). \qquad (7.38)
\end{aligned}$$

Le passage de (7.37) à (7.38) repose sur la propriété iii) du noyau de Fejér. Grâce à la propriété vi), il existe un entier n_0, tel que pour tout $n \geq n_0$, $2\|f\|_\infty I_n(\delta) \leq \varepsilon$. Ce n_0 dépend de f et δ (donc de f et ε), mais pas de x. On aboutit ainsi à

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 = n_0(f, \varepsilon),\ \forall n \geq n_0,\ \forall x \in [-\pi, \pi], \quad \big|\sigma_n(f)(x) - f(x)\big| \leq 2\varepsilon,$$

ce qui signifie que $\sigma_n(f)$ converge vers f, *uniformément* sur $[-\pi, \pi]$. □

Parmi les multiples retombées du théorème de Fejér, figure le résultat de densité que nous avons utilisé par anticipation dans la preuve du théorème 7.25.

Corollaire 7.38. *La famille* $\mathsf{E} = \{e_k;\ k \in \mathbb{Z}\}$ *est totale dans l'espace* $\big(\mathcal{C}(\mathbb{T}), \|\ \|_\infty\big)$.

Preuve. Par le théorème de Fejér, pour f quelconque dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ et tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier n dépendant de f et ε tel que $\|\sigma_n(f) - f\|_\infty < \varepsilon$. Il suffit alors de remarquer que $\sigma_n(f)$ est une combinaison linéaire finie d'éléments de E. □

4. Mais uniformément en x.