Exemples de polynômes orthogonaux classiques – Démonstrations des propriétés –

Denis Vekemans *

1 Les polynômes de Legendre

Propriétés

1. On choisit $i < j$ et on obtiendrait par symétrie un résultat analogue lorsque $j < i$.

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^{1} D^i[(x^2-1)^i] D^j[(x^2-1)^j] dx \\
= & -\int_{-1}^{1} D^{i+1}[(x^2-1)^i] D^{j-1}[(x^2-1)^j] dx \\
+ & \underbrace{\left[D^i[(x^2-1)^i] D^{j-1}[(x^2-1)^j]\right]_{-1}^{1}}_{=0 \text{ car } D^k[(x^2-1)^j]\big|_{\{-1,1\}}=0,\ \forall k\in\{0,1,\ldots,j-1\}} \\
= & \ldots \\
= & (-1)^j \int_{-1}^{1} D^{i+j}[(x^2-1)^i] D^0[(x^2-1)^j] dx \\
+ & \underbrace{\left[D^{i+j-1}[(x^2-1)^i] D^0[(x^2-1)^j]\right]_{-1}^{1}}_{=0 \text{ car } D^k[(x^2-1)^j]\big|_{\{-1,1\}}=0,\ \forall k\in\{0,1,\ldots,j-1\}} \\
= & (-1)^j \int_{-1}^{1} \underbrace{D^{i+j}[(x^2-1)^i]}_{=0 \text{ car si } i<j,\ D^{i+j}[(x^2-1)^i]dx=0} (x^2-1)^j dx \\
= & 0
\end{aligned}$$

Un calcul explicite de P_n à l'aide de la formule de Leibniz fournit :

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!}\sum_{j=0}^{n} C_n^j \frac{n!}{(n-j)!}(x-1)^{n-j}\frac{n!}{j!}(x+1)^j \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n} \left(C_n^j\right)^2 (x-1)^{n-j}(x+1)^j
\end{aligned}$$

Et, il s'ensuit que $P_n(1) = 1$.

2. Voir plus haut.

*Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

3. On a $P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n}\left(C_n^j\right)^2(x-1)^{n-j}(x+1)^j$, d'où on déduit

$$\begin{aligned} & P_n(\frac{1+x}{1-x}) \\ = & \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n}\left(C_n^j\right)^2(\frac{2x}{1-x})^{n-j}(\frac{2}{1-x})^j \\ = & \frac{1}{(1-x)^n}\sum_{j=0}^{n}\left(C_n^j\right)^2 x^{n-j}. \end{aligned}$$

4. Immédiat car W_n tel que $W_n(x) = (x^2-1)^n$ est un polynôme pair, ce qui induit que P_n, qui est le polynôme dérivé n fois de W_n, est un polynôme de même parité que n.
5. $P_n' = \sum_{j=0}^{n-1} b_j P_j$ où $b_j \in \mathbb{R}$, car P_j est de degré j. On déduit donc

$$\int_{-1}^{1} P_n'(x)P_j(x)dx = b_j\int_{-1}^{1}P_j^2(x)dx.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{1} P_n'(x)P_j(x)dx \\ = & \underbrace{-\int_{-1}^{1} P_n(x)P_j'(x)dx}_{=0 \text{ car } \deg P_j' < n} \\ + & \underbrace{[P_n(x)P_j(x)]_{-1}^{1}}_{=1-(-1)^{n+j} \text{ car } P_n \text{ est de la parité de } n \text{ et que } P_n(1)=1} \end{aligned}$$

6. $P_0(x) = 1$ car P_0 est de degré 0 et tel que $P_0(1) = 1$.

$P_1(x) = x$ car P_1 est de degré 1, impair et tel que $P_1(1) = 1$.

On a encore

$$P_{n+1}(x) = (B_n + xA_n)P_n(x) + C_nP_{n-1}(x).$$

En effet, on peut écrire $P_{n+1}(x) = (B_n + xA_n)P_n(x) + C_nP_{n-1}(x) + \sum_{j=0}^{n-2} a_jP_j(x)$, ce qui implique que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} P_{n+1}(x)P_k(x)dx &= \int_{-1}^{1}(B_n + xA_n)P_n(x)P_k(x)dx \\ & +C_n\int_{-1}^{1}P_{n-1}(x)P_k(x)dx \\ & +\sum_{j=0}^{n-2} a_j\int_{-1}^{1}P_j(x)P_k(x)dx, \end{aligned}$$

et, pour $k \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$, cela fournit $a_k\int_{-1}^{1}P_k^2(x)dx = 0$ puis $a_k = 0$ car $\int_{-1}^{1}P_k^2(x)dx \neq 0$.

Recherche de A_n

Soit a_n le coefficient du terme de plus haut degré de P_n.

$$\begin{aligned} a_nx^n &= \frac{1}{2^n n!}D^n[x^{2n}] \\ &= \frac{1}{2^n n!}\frac{(2n)!}{n!} \end{aligned}$$

Or, $A_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, donc $A_n = \frac{2n+1}{n+1}$.

Recherche de B_n

$B_n = 0$ car P_n est de même parité que n.

Recherche de C_n

On a $P_n(1) = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Donc, $1 = A_n + C_n$. Puis, $C_n = \frac{-n}{n+1}$.

7. D'après la relation de récurrence à trois termes, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= (n+1)\underbrace{\int_{-1}^{1} P_{n+1}(x)P_{n-1}(x)dx}_{=0} \\ &\quad -(2n+1)\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_{n-1}(x)dx + n\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= (n+1)\underbrace{\int_{-1}^{1} P_{n+1}(x)P_n(x)dx}_{=0} \\ &\quad -(2n+1)\int_{-1}^{1} xP_n^2(x)dx + n\underbrace{\int_{-1}^{1} P_{n-1}(x)P_n(x)dx}_{=0}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= (n+1)\int_{-1}^{1} P_{n+1}^2(x)dx \\ &\quad -(2n+1)\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_{n+1}(x)dx + n\underbrace{\int_{-1}^{1} P_{n-1}(x)P_{n+1}(x)dx}_{=0}. \end{aligned}$$

De la troisième égalité, on déduit

$$n\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx - (2n-1)\int_{-1}^{1} xP_{n-1}(x)P_n(x)dx = 0.$$

De la première égalité,

$$-(2n+1)\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_{n-1}(x)dx + n\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)dx = 0.$$

Ainsi,

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2n-1}{2n+1}\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)dx = 0.$$

Par récurrence, il vient

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{1}{2n+1}\underbrace{\int_{-1}^{1} P_0^2(x)dx}_{=2} = \frac{2}{2n+1}.$$

8. Soit $G_n(z) = \sum_{n\geq 0} P_n(x)z^n$.

En dérivant,

$$\begin{aligned} G_n'(z) &= \sum_{n\geq 1} nP_n(x)z^{n-1} \\ &= \sum_{n\geq 0}(n+1)P_{n+1}(x)z^n \\ &= \sum_{n\geq 0}\left((2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)\right)z^n \\ &= x\sum_{n\geq 0}(2n+1)P_n(x)z^n - \sum_{n\geq 1} nP_{n-1}(x)z^n. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$-2xzG_n'(z) = -2x\sum_{n\geq 1} nP_n(x)z^n,$$

$$z^2G_n'(z) = \sum_{n\geq 2}(n-1)P_{n-1}(x)z^n,$$

$$zG_n(z) = \sum_{n\geq 1} P_{n-1}(x)z^n,$$

et,

$$-xG_n(z) = -x\sum_{n\geq 0} P_n(x)z^n.$$

Il s'ensuit

$$\begin{aligned} & (1-2xz+z^2)G_n'(z) \\ = \; & x\sum_{n\geq 0}(2n+1)P_n(x)z^n - \sum_{n\geq 1} nP_{n-1}(x)z^n \\ & -2x\sum_{n\geq 1} nP_n(x)z^n + \sum_{n\geq 2}(n-1)P_{n-1}(x)z^n \\ = \; & x\sum_{n\geq 0} P_n(x)z^n - P_0(x)z - \sum_{n\geq 2} P_{n-1}(x)z^n \\ = \; & x\sum_{n\geq 0} P_n(x)z^n - \sum_{n\geq 1} P_{n-1}(x)z^n \\ = \; & (x-z)G_n(z) \end{aligned}$$

La résolution de l'équation différentielle

$$\begin{aligned} \frac{G_n'(z)}{G_n(z)} &= \frac{x-z}{1-2xz+z^2} \\ &= \frac{-u'(z)}{2u(z)}, \end{aligned}$$

avec $u(z) = 1-2xz+z^2$.

Puis,

$$G_n(z) = \frac{a}{\sqrt{1-2xz+z^2}}.$$

Or, $P_n(1) = 1$, donc, lorsque $x = 1$, $G_n(z) = \frac{1}{1-z}$, ce qui donne $a = 1$.

Pour conclure,

$$G_n(z) = \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}.$$

2 Les polynômes de Tchébychev de première et seconde espèce

Propriétés

1. La formule trigonométrique

$$\cos p + \cos q = 2\cos(\frac{p-q}{2})\cos(\frac{p+q}{2})$$

avec $p = (n+1)\Theta$ et $q = (n-1)\Theta$ fournit immédiatement le résultat.

2. Une récurrence simple depuis la formule de récurrence à trois termes induit que les fonctions T_n sont des fonctions polynômes.

3.

$$\frac{dT_n(x)}{dx} = \frac{dT_n(x)}{d\Theta\frac{dx}{d\Theta}} = n\frac{\sin(n\Theta)}{\sin\Theta}.$$

4. Les fonctions U_n sont des fonctions polynômes comme dérivées de fonctions polynômes.

5.

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
= & -\int_{\pi}^{0} \cos(n\Theta)\cos(m\Theta)d\Theta \text{ avec } \Theta = \arccos x \\
= & \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left(\cos((n+m)\Theta) + \cos((n-m)\Theta)\right) d\Theta \\
= & \ 0 \text{ car } n \neq m
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^{1} T_n^2(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
= & \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left(\cos((2n)\Theta) + \cos((0)\Theta)\right) d\Theta \text{ (voir ci} - \text{haut)} \\
= & \int_0^{\pi} \frac{1}{2} d\Theta \\
= & \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

7. Soit

$$\begin{aligned}
Z_n(x) &= \frac{1}{2}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n\right], \\
\text{pour } x &\in]-\infty,-1]\bigcup[1,\infty[.
\end{aligned}$$

On a $Z_0(x) = 1$ et $Z_1(x) = x$.

De plus,

$$\begin{array}{rl}
& Z_{n-1}(x) + Z_{n+1}(x) \\
= & \dfrac{1}{2}\left[\begin{array}{c} (x+\sqrt{x^2-1})^n\left(x+\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right) \\ +(x-\sqrt{x^2-1})^n\left(x-\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\right) \end{array}\right] \\
= & \dfrac{1}{2}\left[\begin{array}{c} (x+\sqrt{x^2-1})^n\left(x+\sqrt{x^2-1}+\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{1}\right) \\ +(x-\sqrt{x^2-1})^n\left(x-\sqrt{x^2-1}+\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{1}\right) \end{array}\right] \\
= & 2x\dfrac{1}{2}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n\right] \\
= & 2xZ_n(x)
\end{array}$$

Ainsi, les fonctions Z_n vérifient la même relation de récurrence à trois termes que les T_n, ce qui implique

$$Z_n = T_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

8. C'est immédiat par une récurrence simple depuis la formule de récurrence à trois termes.
9. On a

$$T_n(x) = \cos(n\mathrm{arccos}x) \ ;$$

$$T_n'(x) = \sin(n\mathrm{arccos}x)\frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \ ;$$

et

$$T_n''(x) = \cos(n\mathrm{arccos}x)\frac{-n^2}{1-x^2} + \sin(n\mathrm{arccos}x)\frac{nx}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)}.$$

Et, le résultat découle directement.

10. Soit $k < n$,

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^{1} W_n(x)x^k \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
= \; & \int_{-1}^{1} D^n \left[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}}\right] x^k dx \\
= \; & -\int_{-1}^{1} D^{n-1} \left[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}}\right] (kx^{k-1}) dx \\
+ \; & \underbrace{\left[D^{n-1}\left[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}}\right] x^k\right]_{-1}^{1}}_{=0 \text{ car } D^q\left[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}}\right]|_{\{-1,1\}}=0,\ \forall q\in\{0,1,\dots,n-1\}} \\
= \; & \dots \\
= \; & (-1)^k \int_{-1}^{1} D^{n-k} \left[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}}\right] (k!) dx \\
& +(-1)^{k-1} \underbrace{\left[D^{n-k}\left[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}}\right] (k!x)\right]_{-1}^{1}}_{=0 \text{ car } D^q\left[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}}\right]|_{\{-1,1\}}=0,\ \forall q\in\{0,1,\dots,n-1\}} \\
= \; & (-1)^k k! \int_{-1}^{1} D^{n-k} \left[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}}\right] dx \\
= \; & (-1)^k k! \underbrace{\left[D^{n-k-1}\left[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}}\right]\right]_{-1}^{1}}_{=0 \text{ car } D^q\left[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}}\right]|_{\{-1,1\}}=0,\ \forall q\in\{0,1,\dots,n-1\}} \\
= \; & 0.
\end{aligned}$$

Donc, pour tout polynôme p de degré strictement inférieur à n,

$$\int_{-1}^{1} W_n(x)p(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

En particulier, pour $p(x) = W_k(x)$ où $k < n$ car il est évident que W_k est un polynôme.
Ainsi, les polynômes W_n sont orthogonaux pour le même produit scalaire que les polynômes T_n. Il s'ensuit que ces polynômes sont proportionnels.

3 Les polynômes de Laguerre

Propriétés

1. Après avoir dérivé deux fois $L_n^\alpha(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, le calcul de $xy'' + (\alpha+1-x)y' + ny = 0$ nous donne

$$\begin{cases}
na_0 + (\alpha+1)a_1 = 0, \text{ (terme constant)} \\
k(k+1)a_{k+1} - ka_k + (\alpha+1)(k+1)a_{k+1} + na_k = 0, \\
\qquad \text{(terme en } x^k, \text{ pour} k \text{ variant de 1 à } n-1 \text{et avec } a_n = 1) \\
-na_n + na_n = 0, \text{ (terme dominant)}
\end{cases}$$

Ainsi,

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k-n}{(k+1)(\alpha+k+1)}, \ \forall k \in \{0,1,\dots,n-1\}.$$

Comme $a_n = 1$ et $a_k = \frac{(k+1)(\alpha+k+1)}{k-n} a_{k+1}, \ \forall k \in \{0,1,\dots,n-1\}$, on déduit

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{[(k+1)(k+2)\dots(n)][(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)\dots(\alpha+n)]}{(k-n)(k+1-n)\dots(n-1-n)}, \\ \forall k &\in \{0,1,\dots,n-1\} \\ &= (-1)^{n-k} C_n^k [(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)\dots(\alpha+n)], \\ \forall k &\in \{0,1,\dots,n-1\} \\ &= C_n^k (-1)^{n-k} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} \end{aligned}$$

2. Il est évident que $L_0^\alpha(x) = 1$ et $L_1^\alpha(x) = x - (\alpha+1)$.

   Comme le polynôme L_n^α est unitaire et de degré n, on a :

$$L_{n+1}^\alpha(x) = xL_n^\alpha(x) + A_n L_n^\alpha(x) + B_n L_{n-1}^\alpha(x) + \sum_{k=0}^{n-2} L^k(x) b_k$$

   où les $(b_k)_{k\in\{0,1,\dots,n-2\}}$, A_n et B_n sont déterminés de façon unique. On pose

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x^k,$$

   avec $a_k^{(n)} = (-1)^{n-k} C_n^k [(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)\dots(\alpha+n)], \ \forall k \in \{0,1,\dots,n-1\}$ et $a_n^{(n)} = 1$.
   On déduit en remplaçant dans l'égalité précédente que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} a_k^{(n+1)} x^k &= \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x^{k+1} + A_n \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x^k \\ &\quad + B_n \sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(n-1)} x^k + \sum_{l=0}^{n-2} b_l \sum_{k=0}^{l} a_k^{(l)} x^k. \end{aligned}$$

   <u>Recherche de A_n</u>

   Le terme en x^n de la précédente égalité donne

$$0 = -a_n^{(n+1)} + A_n a_n^{(n)} + a_{n-1}^{(n)}$$

$$\Longleftrightarrow 0 = (n+1)(\alpha+n+1) + A_n - n(\alpha+1)$$

$$\Longleftrightarrow A_n = -\alpha - 2n - 1.$$

   <u>Recherche de B_n</u>

   Le terme en x^{n-1} de la précédente égalité donne

$$0 = -a_{n-1}^{(n+1)} + A_n a_{n-1}^{(n)} + a_{n-2}^{(n)} + B_n a_{n-1}^{(n-1)}$$

$$\begin{aligned} \iff \quad 0 = &-\frac{n(n+1)(\alpha+n)(\alpha+n+1)}{2} - (-\alpha-2n-1)(n)(\alpha+n) \\ &+\frac{(n-1)n(\alpha+n-1)(\alpha+n)}{2} + B_n \\ &\iff B_n = -n(\alpha+n). \end{aligned}$$

Recherche des b_k

On montre de façon directe que $b_k = 0$, pour $k \in \{0, 1, n-2\}$.

Le terme en x^k de la précédente égalité donne, pour $k \in \{1, 2, n-2\}$,

$$0 = -a_k^{(n+1)} + A_n a_k^{(n)} + a_{k-1}^{(n)} + B_n a_k^{(n-1)} + b_k$$

$$\begin{aligned} \iff \quad 0 = &C_{n+1}^k[(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)\dots(\alpha+n+1)] \\ &+(-\alpha-2n-1)C_n^k[(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)\dots(\alpha+n)] \\ &-C_n^{k-1}[(\alpha+k)(\alpha+k+1)\dots(\alpha+n)] \\ &-(-n(\alpha+n))C_{n-1}^k[(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)\dots(\alpha+n-1)] + b_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iff \quad 0 = &C_n^k[(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)\dots(\alpha+n)] \\ &\left\{ \begin{array}{c} \frac{n+1}{n+1-k}(\alpha+n+1) - (\alpha+2n+1) \\ -\frac{k}{n+1-k}(\alpha+k) + (n-k) \end{array} \right\} + b_k. \\ &\iff b_k = 0. \end{aligned}$$

Le terme constant de la précédente égalité donne

$$0 = -a_0^{(n+1)} + A_n a_0^{(n)} + B_n a_0^{(n-1)} + b_0$$

$$\begin{aligned} \iff \quad 0 = &C_{n+1}^0[(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n+1)] \\ &+(-\alpha-2n-1)C_n^0[(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)] \\ &-(-n(\alpha+n))C_{n-1}^0[(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1)] + b_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iff \quad 0 = &[(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)] \\ &\{(\alpha+n+1) - (\alpha+2n+1) + (n)\} + b_0. \\ &\iff b_0 = 0. \end{aligned}$$

3. Par définition,

$$xL''^{\alpha}_n(x) + (\alpha+1-x)L'^{\alpha}_n(x) + nL^{\alpha}_n(x) = 0.$$

Calcul de $D\left[xL'^{\alpha}_n(x)x^{\alpha}e^{-x}\right]$

$$\begin{aligned} D\left[L'^{\alpha}_n(x)x^{\alpha+1}e^{-x}\right] &= L''^{\alpha}_n(x)x^{\alpha+1}e^{-x} + (\alpha+1)L'^{\alpha}_n(x)x^{\alpha}e^{-x} \\ &\quad -L'^{\alpha}_n(x)x^{\alpha+1}e^{-x} \\ &= x^{\alpha}e^{-x}\left[\underbrace{xL''^{\alpha}_n(x) + (\alpha+1-x)L'^{\alpha}_n(x)}_{=-nL^{\alpha}_n(x)}\right] \end{aligned}$$

Ainsi,

$$D\left[{L'_n}^{\alpha}(x)x^{\alpha+1}e^{-x}\right] = x^{\alpha}e^{-x}(-nL_n^{\alpha}(x))$$

et

$$D\left[{L'_m}^{\alpha}(x)x^{\alpha+1}e^{-x}\right] = x^{\alpha}e^{-x}(-mL_m^{\alpha}(x)).$$

On a

$$\begin{aligned}
& D\left[L_m^{\alpha}(x){L'_n}^{\alpha}(x)x^{\alpha+1}e^{-x}\right] \\
= \ & {L'_m}^{\alpha}(x){L'_n}^{\alpha}(x)x^{\alpha+1}e^{-x} + L_m^{\alpha}(x){L''_n}^{\alpha}(x)x^{\alpha+1}e^{-x} \\
+ \ & (\alpha+1)L_m^{\alpha}(x){L'_n}^{\alpha}(x)x^{\alpha}e^{-x} - L_m^{\alpha}(x){L'_n}^{\alpha}(x)x^{\alpha+1}e^{-x} \\
= \ & L_m^{\alpha}(x)x^{\alpha}e^{-x}\left[(\alpha+1-x){L'_n}^{\alpha}(x) + x{L''_n}^{\alpha}(x)\right] \\
& + x^{\alpha+1}e^{-x}{L'_m}^{\alpha}(x){L'_n}^{\alpha}(x) \\
= \ & L_m^{\alpha}(x)x^{\alpha}e^{-x}\left[-nL_n^{\alpha}(x)\right] + x^{\alpha+1}e^{-x}{L'_m}^{\alpha}(x){L'_n}^{\alpha}(x)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
& D\left[(L_m^{\alpha}(x){L'_n}^{\alpha}(x) - {L'_m}^{\alpha}(x)L_n^{\alpha}(x))x^{\alpha+1}e^{-x}\right] \\
= \ & L_m^{\alpha}(x)x^{\alpha}e^{-x}\left[-nL_n^{\alpha}(x)\right] - L_n^{\alpha}(x)x^{\alpha}e^{-x}\left[-mL_m^{\alpha}(x)\right] \\
= \ & (m-n)x^{\alpha}e^{-x}L_n^{\alpha}(x)L_m^{\alpha}(x) \\
= \ & L_m^{\alpha}(x)D\left[{L'_n}^{\alpha}(x)x^{\alpha+1}e^{-x}\right] - L_n^{\alpha}(x)D\left[{L'_m}^{\alpha}(x)x^{\alpha+1}e^{-x}\right]
\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
& (m-n)\int_0^{\infty} L_m^{\alpha}(x)L_n^{\alpha}(x)x^{\alpha}e^{-x}dx \\
= \ & \left[(L_m^{\alpha}(x){L'_n}^{\alpha}(x) - {L'_m}^{\alpha}(x)L_n^{\alpha}(x))x^{\alpha+1}e^{-x}\right]_0^{\infty} \\
= \ & 0.
\end{aligned}$$

Ce qui donne $\int_0^{\infty} L_m^{\alpha}(x)L_n^{\alpha}(x)x^{\alpha}e^{-x}dx = 0$ si $n \neq m$.

4. Depuis la formule de récurrence à trois termes, on tire

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty} L_{n+1}^{\alpha}(x)L_{n+1}^{\alpha}(x)x^{\alpha}e^{-x}dx \\
= \ & \int_0^{\infty} xL_n^{\alpha}(x)L_{n+1}^{\alpha}(x)x^{\alpha}e^{-x}dx, \ \forall n \geq 0
\end{aligned}$$

car la formule de récurrence à trois termes peut être étendue au cas $n = 0$ en convenant $L_{-1}^{\alpha}(x) = 0$, et,

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty} xL_n^{\alpha}(x)L_{n-1}^{\alpha}(x)x^{\alpha}e^{-x}dx \\
= \ & n(\alpha+n)\int_0^{\infty} L_{n-1}^{\alpha}(x)L_{n-1}^{\alpha}(x)x^{\alpha}e^{-x}dx, \ \forall n \geq 1.
\end{aligned}$$

On déduit alors

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty L_n^\alpha(x)L_n^\alpha(x)x^\alpha e^{-x}dx \\ = \; & n(\alpha+n)\int_0^\infty L_{n-1}^\alpha(x)L_{n-1}^\alpha(x)x^\alpha e^{-x}dx, \ \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Puis, par une récurrence simple,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty L_n^\alpha(x)L_n^\alpha(x)x^\alpha e^{-x}dx \\ = \; & n!\underbrace{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}_{=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)}}\underbrace{\int_0^\infty L_0^\alpha(x)L_0^\alpha(x)x^\alpha e^{-x}dx}_{=\Gamma(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Le résultat

$$\int_0^\infty \left(L_n^\alpha\right)^2(x)e^{-x}dx = n!\Gamma(\alpha+n+1),$$

est alors immédiat.

4 Les polynômes d'Hermite

Propriétés

1. On montre ce résultat par récurrence sur n.
   Pour $w=0$, $H_0(x) = e^{2x0-0^2} = 1$ et est un polynôme de degré 0.
   $$\frac{dG(x,w)}{dx} = 2we^{2xw-w^2} = \sum_{n\geq 0}\frac{w^n}{n!}H_n'(x) = \sum_{n\geq 1}\frac{w^n}{n!}H_n'(x).$$
   Et, d'autre part,
   $$2we^{2xw-w^2} = \sum_{n\geq 0}\frac{2w^{n+1}}{n!}H_n(x) = \sum_{n\geq 1}\frac{2w^n}{(n-1)!}H_{n-1}(x).$$
   Ainsi, en identifiant les termes en w^n, on obtient
   $$2nH_{n-1}(x) = H_n'(x).$$
   Et, par une récurrence simple, H_n est un polynôme de degré n.
2. Immédiat (voir ci-haut).
3.
$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^\infty G(x,w)G(x,\overline{w})e^{-x^2}dx \\ = \; & \int_{-\infty}^\infty e^{2xw-w^2+2x\overline{w}-\overline{w}^2-x^2}dx \\ = \; & e^{2w\overline{w}}\int_{-\infty}^\infty e^{-(x-w-\overline{w})^2}dx \\ = \; & e^{2w\overline{w}}\int_{-\infty}^\infty e^{-(u)^2}dx \text{ avec } u = x-w-\overline{w} \\ = \; & \sqrt{\pi}e^{2w\overline{w}} \end{aligned}$$

4. La précédente propriété donne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m\geq 0} \frac{\overline{w}^m}{m!} H_m(x) \sum_{n\geq 0} \frac{w^n}{n!} H_n(x) e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} e^{2w\overline{w}}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} \left(\sum_{m\geq 0} \frac{\overline{w}^m}{n!m!} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx \right) w^n &= \sqrt{\pi} e^{2w\overline{w}} \\ &= \sqrt{\pi} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{2^n}{n!} \overline{w}^n \right) w^n.\end{aligned}$$

En poursuivant,

$$\sum_{m\geq 0} \frac{\overline{w}^m}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} 2^n \overline{w}^n.$$

Ainsi, si $n \neq m$, $\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = 0$ et $\int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(x) e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} 2^n n!$.

5. Immédiat (voir ci-haut).

6.

$$\begin{aligned}\frac{dG(x,w)}{dw} &= 2(x-w)e^{2xw-w^2} \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{nw^{n-1}}{n!} H_n(x) \\ &= \sum_{n\geq 1} \frac{nw^{n-1}}{n!} H_n(x) \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{w^n}{n!} H_{n+1}(x).\end{aligned}$$

Et, d'autre part,

$$\begin{aligned}2(x-w)e^{2xw-w^2} &= \sum_{n\geq 0} \frac{2xw^n}{n!} H_n(x) - \sum_{n\geq 0} \frac{2w^{n+1}}{n!} H_n(x) \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{2xw^n}{n!} H_n(x) - \sum_{n\geq 1} \frac{2w^n}{(n-1)!} H_{n-1}(x).\end{aligned}$$

D'où,

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$$

pour $n \geq 1$ avec $H_0(x) = 1$ et $H_1(x) = 2xH_0(x) = 2x$.

7. Par récurrence.

$$H_0(x) = (-1)^0 e^{x^2} D^0[e^{-x^2}] = 1.$$

$$H_1(x) = (-1)^1 e^{x^2} D^1[e^{-x^2}] = 2x.$$

Si

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} D^n[e^{-x^2}],$$

alors

$$\underbrace{H_n'(x)}_{=2nH_{n-1}(x)} = (-1)^n 2xe^{x^2} D^n[e^{-x^2}] + (-1)^n e^{x^2} D^{n+1}[e^{-x^2}].$$

Or

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$$

pour $n \geq 1$, donc

$$H_{n+1}(x) = (-1)^{n+1} e^{x^2} D^{n+1}[e^{-x^2}].$$

8. H_0 satisfait l'équation différentielle

$$y'' - 2xy' = 0.$$

H_1 satisfait l'équation différentielle

$$y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

On a

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + \underbrace{2nH_{n-1}(x)}_{=H_n'(x)} = 0$$

pour $n \geq 1$.

Donc

$$\underbrace{H_{n+1}'(x)}_{=2(n+1)H_n(x)} - 2xH_n'(x) - 2H_n(x) + H_n''(x) = 0$$

pour $n \geq 1$.

Donc,

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$$

pour $n \geq 1$.

Références

[1] C. Brezinski, *Padé-type Approximations and General Orthogonal Polynomials*, volume 50 of ISNM, Birkhaüser-Verlag, Basel, 1980.

[2] J. Van Iseghem, *Polynômes orthogonaux ; Synthèse des présentations de polynômes orthogonaux classiques ; Extensions*, Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique et Optimisation de l'Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois, 1988.