MP* 1 (Rabat)
Groupe 2

My Ismail Mamouni
http ://myismail.net
مَمُونِي مُولَاي اسْمَاعِيل

Préparation aux Concours (Mines)

Polynômes Orthogonaux

Soit **C** l'espace vectoriel normé des fonctions réelles, définies sur le segment $I = [-1, 1]$, continues ; la norme de cet espace est la norme de la convergence uniforme, définie pour une fonction f de **C** par la relation :

$$\|f\| = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

Pour tout entier naturel n, l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à n, est notée $\mathbf{E}_n$. Par abus de langage, la locution " fonction polynomiale" est remplacée par polynôme.

Première partie

Il est admis que, pour une fonction f donnée continue sur le segment I et un entier naturel donné n, il existe un polynôme P_n, de degré inférieur ou égal à n, tel que :

$$\|f - P_n\| = \Delta_n(f) = \inf\{\|f - P\| \mid P \in E_n\}.$$

Le but de cette partie est d'étudier l'erreur commise lors de la meilleure approximation d'une fonction continue par une fonction polynomiale et de montrer le résultat : si f est une fonction k-fois continûment dérivable sur $I = [-1, 1]$, la meilleure approximation de la fonction f par un polynôme de degré inférieur ou égal à n est telle que :

$$\Delta_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

Soit φ une fonction réelle définie sur l'intervalle I, bornée (il existe une constante M telle que, pour tout réel x de I, $|\varphi(x)| \leq M$). À cette fonction φ est associée la fonction ω_φ, dite "module de continuité de φ". Elle est définie sur la demi-droite ouverte $]0,\infty[$ de la manière suivante :

Étant donné un réel h strictement positif, $\omega_\varphi(h)$ est égal à la borne supérieure des réels $|\varphi(x) - \varphi(y)|$ sachant que x et y sont deux réels de l'intervalle I dont la valeur absolue de la différence est majorée par h :

$$\omega_\varphi(h) = \sup\left\{|\varphi(x) - \varphi(y)|\ ;\ \left(x,\, y\right) \in I^2,\ |x-y| \leq h\right\}.$$

I-1. **Propriétés du module de continuité** :

Soit φ une fonction réelle définie et bornée sur le segment I.

a. Démontrer que le module de continuité de cette fonction φ est une fonction croissante définie sur la demi-droite ouverte $]0,\infty[$.

b. Soient h et h' deux réels strictement positifs, démontrer la propriété :

$$\omega_\varphi(h+h') \leq \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h').$$

Soient h et λ deux réels strictement positifs, n un entier supérieur ou égal à 1 ; démontrer les relations suivantes :

$$\omega_\varphi\left(n\,h\right) \leq n\,\omega_\varphi(h) \quad ; \quad \omega_\varphi\left(\lambda\,h\right) \leq (1+\lambda)\,\omega_\varphi(h).$$

c. Démontrer que la fonction φ est uniformément continue sur le segment I si et seulement si la limite du module de continuité ω_φ en 0 est nulle :

$$\varphi \text{ est uniformément continue sur } I \Longleftrightarrow \lim_{h\to 0} \omega_\varphi(h) = 0.$$

d. Démontrer que, si la fonction φ est continûment dérivable sur le segment I, il vient pour tout réel positif h :

$$\omega_\varphi(h) \leq h\,\|\varphi'\|.$$

I-2. **Noyaux de Dirichlet et de Fejer** :

Étant donné un entier n supérieur ou égal à 1 ($n \geq 1$), soient D_n et F_n les fonctions définies pour tout réel θ par les relations suivantes :

$$D_n(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\theta}\ ;\ F_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} D_k(\theta).$$

Il est admis que la fonction F_n vérifie les relations suivantes :

pour tout θ différent de $2k\pi$, k entier relatif, $F_n(\theta) = \displaystyle\sum_{k=-n+1}^{n-1}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)e^{ik\theta} = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\left(n\,\theta/2\right)}{\sin(\theta/2)}\right)^2.$

Soit K_n la fonction définie dans l'ensemble $\mathbf{R} \setminus 2\pi\,\mathbf{Z}$ par la relation suivante :

$$K_n(\theta) = \frac{1}{\lambda_n}\left(\frac{\sin\left(n\,\theta/2\right)}{\sin(\theta/2)}\right)^4,$$

où le réel λ_n est défini par la condition :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(\theta)\, d\theta = 1.$$

a. Calculer le réel λ_n et déterminer une constante C telle que ce réel soit équivalent à l'infini à $C\, n^3$. Rappel :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

b. Soit α la fonction définie sur l'intervalle semi-ouvert $]0, \pi/2]$ par la relation suivante :

$$\alpha(t) = \frac{1}{\sin^4 t} - \frac{1}{t^4}.$$

Démontrer qu'il existe une constante A_1 telle que la fonction α soit équivalente en 0 à $A_1\, t^{-2}$. En déduire que la fonction $t \mapsto t^3\, \alpha(t)$ est bornée sur l'intervalle $]0, \pi/2]$. Soit A_2 un majorant de cette fonction sur l'intervalle $]0, \pi/2]$.

Soient I_n et J_n les deux intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4(nt)}{t^3} dt \quad ; \quad J_n = \int_0^{\pi/2} t\, \alpha(t)\, \sin^4(nt) dt.$$

Démontrer les deux propriétés suivantes :

$$\text{lorsque l'entier } n \text{ tend vers l'infini,} \quad I_n \sim n^2. \int_0^{\infty} \frac{\sin^4 t}{t^3} dt \quad ;$$
$$\text{pour tout entier naturel } n,\ (n \geq 1), \quad J_n \leq A_2\, n \int_0^{\infty} \frac{\sin^4 t}{t^2} dt.$$

c. Démontrer l'existence d'une constante M_0 telle que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, il vienne :

$$0 \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \big(1 + n\, t\big) K_n(t)\, dt \leq M_0.$$

I-3. Polynôme $j_n[g]$:

Soit g une fonction paire définie sur la droite réelle périodique et de période 2π ; étant donné un entier n supérieur ou égal à 1, soit $j_n[g]$ la fonction définie par la relation suivante :

$$j_n[g](\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta - t)\, K_n(t)\, dt.$$

a. Démontrer que la fonction $j_n[g]$ est paire et est un polynôme de degré au plus égal à $2n - 2$.

b. Vérifier les inégalités suivantes :

$$|g(\theta) - g(\theta - t)| \leq \omega_g(|t|) \leq \big(1 + n\,|t|\big)\, \omega_g\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

puis, en utilisant les résultats des questions précédentes, démontrer la majoration :

$$|g(\theta) - j_n[g](\theta)| \leq M_0\, \omega_g\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Dans la suite l'entier n est supposé supérieur ou égal à 3 ; à l'entier n est associé l'entier p égal à la partie entière du réel $n/2$. L'entier vérifie les inégalités :

$$p \leq n/2 < p+1.$$

I-4. **Polynôme associé à une fonction de l'espace C** :

Soit f une fonction de l'espace **C**. À cette fonction f est associée la fonction g périodique de période 2π, définie, pour tout réel θ, par la relation :

$$g(\theta) = f(\cos\theta).$$

Soit P_n la fonction définie sur l'intervalle $I = [-1,1]$ par la relation : pour tout réel x de I,

$$P_n(x) = j_{p+1}[g](Arc\cos x).$$

L'entier p est la partie entière de $n/2$ définie ci-dessus.

a. Démontrer que la fonction P_n est un polynôme (une fonction polynomiale) de degré au plus égal à n. Il est admis que, pour tout entier naturel k, la fonction $x \mapsto \cos\left(k\, Arc\cos x\right)$ est un polynôme de degré k.

b. Démontrer, pour toute fonction f de l'espace **C** et tout entier n ($n \geq 3$), la relation suivante :

$$\Delta_n(f) \leq 2\, M_0\, \omega_f\left(\frac{1}{n}\right).$$

La constante M_0 a été introduite à la question I-2.c et $\Delta_n(f)$ dans l'introduction de la partie I.

c. Établir le résultat préliminaire : soit f une fonction de l'espace **C** ; pour tout polynôme Q de degré inférieur ou égal à n, il vient :

$$\Delta_n(f) = \Delta_n(f-Q).$$

Démontrer, pour toute fonction f continûment dérivable sur le segment $I = [-1,1]$ et tout entier n, la relation ci-dessous entre $\Delta_n(f)$ et $\Delta_{n-1}\left(f'\right)$:

$$\Delta_n(f) \leq 2\,\frac{M_0}{n}\,\Delta_{n-1}\left(f'\right).$$

d. Étant donné un entier k supérieur ou égal à 1 ($k \geq 1$), soit f une fonction k-fois continûment dérivable ; déduire du résultat précédent une majoration, pour tout entier n supérieur strictement à k ($n > k$), de $\Delta_n(f)$ en fonction de $\Delta_{n-k}\left(f^{(k)}\right)$.

En déduire que, si f est une fonction k-fois continûment dérivable et n un entier croissant indéfiniment, l'expression $\Delta_n(f)$ est un infiniment petit d'ordre supérieur à $1/n^k$.

$$\Delta_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

SECONDE PARTIE

Le but de cette partie est, pour une fonction f donnée dans **C**, de construire une suite de polynômes $I_n[f]$, qui, lorsque la fonction f est continûment dérivable, converge uniformément vers la fonction f.

Dans cette partie, l'entier n est fixé et est supérieur ou égal à 3 ($n \geq 3$). Soit $\mathbf{E}_n^0$ le sous-espace de $\mathbf{E}_n$ constitué des polynômes (fonctions polynomiales) nulles en -1 et en 1.

II-1. L'espace préhilbertien $\mathbf{E}_n^0$:

a. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathbf{E}_n^0$? Soit $(e_k)_{2 \leq k \leq n}$ la suite de polynômes définie par la relation :

$$\text{pour tout entier } k,\ 2 \leq k \leq n, \quad e_k(x) = x^k - x^{k-2}.$$

Démontrer que la suite de ces polynômes est une base B de l'espace vectoriel $\mathbf{E}_n^0$.

b. Soit Φ_n l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbf{E}_n^0$ défini par la relation suivante :

$$\text{pour tout polynôme } P \text{ de } \mathbf{E}_n^0, \quad \Phi_n(P)(x) = (1 - x^2)\, P''(x).$$

Démontrer que la matrice M_n associée à l'endomorphisme Φ_n dans la base B est une matrice triangulaire supérieure ; déterminer les éléments de la diagonale de cette matrice.

En déduire l'existence d'une base B' définie par une suite de polynômes $(Q_k)_{2 \leq k \leq n}$ qui vérifient les relations suivantes :

$$\text{pour tout entier } k,\ 2 \leq k \leq n, \quad (1 - x^2)\, Q_k''(x) = \mu_k\, Q_k.$$

Ces polynômes sont supposés unitaires (le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1). Préciser les coefficients μ_k, $2 \leq k \leq n$ et le degré des polynômes Q_k.

c. À deux polynômes quelconques P et Q appartenant à l'espace vectoriel $\mathbf{E}_n^0$ est associée l'intégrale $J(P,Q)$ définie par la relation suivante :

$$J(P,Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(x)\, Q(x)}{1 - x^2}\, dx.$$

Démontrer que cette intégrale existe ; à quelle condition sur le polynôme P l'expression $J(P,P)$ est-elle nulle ?

Il est admis dans la suite que l'application $(P,Q) \mapsto J(P,Q)$ de $\mathbf{E}_n^0 \times \mathbf{E}_n^0$ dans $\mathbf{R}$ est un produit scalaire. Dans la suite le produit scalaire est noté $(.\ |\ .)$:

$$(P \mid Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(x)\, Q(x)}{1 - x^2}\, dx.$$

d. Démontrer que la base $B' = (Q_k)_{2 \leq k \leq n}$ est orthogonale dans l'espace préhilbertien $(\mathbf{E}_n^0, (.\ |\ .))$.

II-2. Racines du polynôme Q_n :

a. Un résultat préliminaire : démontrer que le polynôme Q_n possède la propriété : pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à $n - 3$, l'intégrale K ci-dessous est nulle :

$$K = \int_{-1}^{1} P(x)\, Q_n(x)\, dx = 0.$$

b. Deux cas sont considérés :

i. Le polynôme Q_n admet des racines, d'ordre de multiplicité impair, situées dans l'intervalle ouvert $I =]-1, 1[$. Soient $x_1,\ x_2,\ ..., x_p,$ ces racines (l'entier p est strictement positif).

Soit R_1 le polynôme défini par la relation :

$$R_1(x) = \prod_{k=1}^{k=p} (x - x_k).$$

Démontrer que l'intégrale de la fonction $x \mapsto R_1(x)\ Q_n(x)$ étendue au segment I est différente de 0 :

$$\int_{-1}^{1} R_1(x)\ Q_n(x)\ dx \neq 0.$$

En utilisant le résultat de l'alinéa a, déterminer le degré du polynôme R_1.

ii. Le polynôme Q_n n'a pas de racines, d'ordre de multiplicité impair, situées dans l'intervalle ouvert $]-1, 1[$.

Démontrer que l'intégrale de la fonction $x \mapsto Q_n(x)$ étendue au segment I est différente de 0.

En déduire que les racines du polynôme Q_n sont simples et situées sur le segment I.

Dans la suite, les racines du polynôme Q_{n+1} sont notées $y_k,\ k = 0, 1, ..., n$ et vérifient la relation suivante :

$$-1 = y_0 < y_1 < y_2 < ... < y_{n-1} < y_n = 1.$$

II-3. **Polynôme** $I_n[f]$:

Soit f une fonction continue appartenant à l'espace $\mathbf{C}$: $f : I \to \mathbf{R}$.

a. Soit u_n l'application de l'espace vectoriel E_n dans $\mathbf{R}^{n+1}$ définie par la relation suivante :

$$u_n(P) = \big(P(y_0),\ P(y_1),\ ..., P(y_n)\big).$$

Démontrer que l'application u_n est un isomorphisme de l'espace vectoriel E_n sur $\mathbf{R}^{n+1}$.

En déduire qu'à une fonction f donnée dans $\mathbf{C}$, est associé un seul polynôme $I_n[f]$ appartenant à $E_n,$ vérifiant les relations suivantes :

$$\text{pour tout entier } k,\ 0 \leq k \leq n, \quad I_n[f](y_k) = f(y_k).$$

Démontrer que, si P est un polynôme appartenant à E_n, il vient :

$$I_n[f - P] = I_n[f] - P.$$

b. Démontrer que le polynôme $I_n[f]$ s'écrit :

$$I_n[f](x) = \sum_{k=0}^{n} f(y_k)\ L_k(x).$$

où L_k est le polynôme défini par la relation :

$$L_k(x) = \frac{Q_{n+1}(x)}{(x - y_k)\ Q_{n+1}'(y_k)}.$$

c. Démontrer, pour tout polynôme P appartenant à E_n, l'inégalité :

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } I, \quad |f(x) - I_n[f](x)| \leq \left(1 + \sum_{k=0}^{n} |L_k(x)|\right) \|f - P\|.$$

II-4. **Majoration de** $\sum_{k=0}^{n} |L_k(x)|$:

Soit f une fonction continue appartenant à l'espace $\mathbf{C}$: $f : I \to \mathbf{R}$.

a. Soit v_n l'application de l'espace vectoriel E_{2n+1} dans $\mathbf{R}^{2n+2}$ définie par la relation suivante :

$$v_n(P) = \big(P(y_0),\ P(y_1),\ \dots, P(y_n),\ P'(y_0),\ P'(y_1),\ \dots, P'(y_n)\big).$$

Démontrer que l'application v_n est un isomorphisme de l'espace vectoriel E_{2n+1} sur $\mathbf{R}^{2n+2}$.

En déduire qu'à une fonction f donnée dans $\mathbf{C}$ est associé un seul polynôme $H_n[f]$ appartenant à E_{2n+1}, vérifiant les relations suivantes :

$$\text{pour tout entier } k,\ 0 \leq k \leq n, \quad H_n[f](y_k) = f(y_k),\ H_n[f]'(y_k) = f'(y_k).$$

Que vaut $H_n[1]$?

Il est admis que le polynôme $H_n[f]$ est défini par la relation suivante :

$$H_n[f](x) = \sum_{k=0}^{n} f'(y_k)\,(x - y_k)\,(L_k(x))^2 + \sum_{k=0}^{n} f(y_k)\,(1 - 2(x - y_k)L_k'(y_k))\,(L_k(x))^2.$$

b. Calcul des dérivées $L_k'(y_k)$.

Déterminer l'expression, pour tout entier k compris entre 0 et n $(0 \leq k \leq n)$, de la dérivée $L_k'(y_k)$ en fonction des dérivées première et seconde $Q_{n+1}'(y_k)$ et $Q_{n+1}''(y_k)$.

En utilisant l'équation différentielle vérifiée par le polynôme Q_{n+1} (question II-1.b) déterminer les valeurs de $L_k'(y_k)$ lorsque l'entier k est compris entre 1 et $n-1$ $(1 \leq k \leq n-1)$. Calculer ensuite $L_0'(y_0)$ et $L_n'(y_n)$.

c. En déduire les inégalités :

$$\text{pour tout réel } x \text{ du segment } I, \quad \sum_{k=0}^{n} (L_k(x))^2 \leq 1, \quad \sum_{k=0}^{n} |L_k(x)| \leq \sqrt{n+1}.$$

II-5 Estimation de l'approximation :

Démontrer que, pour toute fonction continue appartenant à l'espace $\mathbf{C}$, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, la norme de la différence entre la fonction f et le polynôme $I_n[f]$ est majorée par le produit $2\sqrt{n}\ \Delta_n(f)$:

$$\|f - I_n[f]\| \leq 2\sqrt{n}\ \Delta_n(f).$$

En particulier démontrer que, si la fonction f est continûment dérivable sur I, la suite des polynômes $I_n[f]$ converge uniformément, lorsque l'entier n tend vers l'infini, vers la fonction f.

Que dire de la convergence lorsque la fonction f est indéfiniment continûment dérivable ?

FIN DU PROBLÈME