Problème : Polynômes de Legendre et quadrature de Gauss

Les parties de ce problème ne sont pas indépendantes.
Dans ce problème, on note

- $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes en l'indéterminée X à coefficients réels.
- $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients réels.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[x]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$ formé des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

On rappelle :

- Un polynôme se note P, la fonction polynomiale associée à P se note $\widetilde{P}$. Ces deux notions sont différentes et le candidat sera fortement pénalisé s'il confond ces deux notions.
- Plus précisément, si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\widetilde{P}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.
- Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Si $\widetilde{P} = \widetilde{Q}$ alors $P = Q$.
- Une famille, de polynômes de degrés deux à deux distincts, est libre.
  On pourra utiliser librement ces résultats dans tout le problème.

Partie n° 1 : Préliminaire

Soient a et b deux réels avec $a < b$. On se donne w une application continue sur $[a, b]$ telle que $\forall x \in]a, b[,\ w(x) > 0$.
Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $(P \mid Q) = \int_a^b \widetilde{P}(t)\widetilde{Q}(t)w(t)\, dt$.
Montrer que $(\cdot \mid \cdot)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Partie n° 2 : Familles de polynômes orthogonaux

On dit qu'une famille de polynômes $(P_n)_{n\geqslant 0}$ est orthogonale de degrés échelonnés, et on note ODE, si

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$.
- La famille $(P_n)_{n\geqslant 0}$ est orthogonale pour $(\cdot \mid \cdot)$.

1. Expliquer pourquoi une telle famille existe.
   Dans le reste de cette partie, $(P_n)_{n\geqslant 0}$ désigne une famille ODE.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, pour tout $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $(P_n \mid Q) = 0$.
3. Montrer qu'une famille $(Q_n)_{n\geqslant 0}$ est ODE si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}^\star$ tel que $Q_n = \lambda_n P_n$.
4. En déduire qu'il existe une unique famille de polynômes ODE et unitaires.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On veut montrer que les racines complexes de P_n sont toutes réelles, simples et qu'elles appartiennent à $]a, b[$.
   Pour cela, on note $\mathcal{S} = \{x_1, \ldots, x_m\}$, en extension, l'ensemble, éventuellement vide, des racines de P_n qui appartiennent à $]a, b[$ et qui sont de multiplicité impaire.
   Enfin, on pose $Q = (X - x_1) \times (X - x_2) \times \cdots \times (X - x_m)$ si $\mathcal{S}$ est non vide et $Q = 1$ sinon.
   (a) Montrer que m est inférieur ou égal à n.
   (b) En raisonnant par l'absurde, montrer que $m = n$.
   (c) Conclure.
6. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
   (a) Montrer que les polynômes $P_0, \cdots, P_{n-2}, P_{n-1}, XP_{n-1}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Ainsi, on sait qu'il existe $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k + \alpha_n X P_{n-1}$.

(b) Montrer que pour tout $j \in \{0, \cdots, n-3\}$, $\alpha_j = 0$.

(c) En déduire l'existence de trois suites réelles $(a_n)_{n\geqslant 2}$, $(b_n)_{n\geqslant 2}$ et $(c_n)_{n\geqslant 2}$ telles que $\forall n \geqslant 2$, $P_n = (a_n X + b_n)P_{n-1} + c_n P_{n-2}$.

Partie n$^{\text{o}}$ 3 : Polynômes de Legendre

Dorénavant, $a = -1$, $b = 1$ et $w : x \mapsto 1$.

1. Montrer qu'il existe une unique famille $(L_n)_{n\geqslant 0}$ ODE telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{L_n}(1) = 1$. Les polynômes L_n sont appelés les polynômes de Legendre.
2. Pour tout entier n, on pose $U_n = (X^2-1)^n \in \mathbb{R}[X]$.

   (a) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $(U_n \mid P^{(n)}) = (-1)^n \times (U_n^{(n)} \mid P)$.

   (b) En déduire que $(U_n^{(n)})_{n\geqslant 0}$ est une famille ODE.

   (c) Calculer $\widetilde{U_n}^{(n)}(1)$.

   (d) En déduire la formule de Rodrigues :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ L_n = \frac{1}{n!2^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n}(X^2-1)^n.$$

   (e) Pour $0 \leqslant n \leqslant 3$, expliciter L_n.

   (f) Montrer que $\widetilde{L_n}$ et n ont la même parité.

   (g) Déterminer le coefficient dominant de L_n.

   (h) Après avoir expliqué pourquoi il était possible d'écrire $L_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \alpha_k X^{n-2k}$, expliciter les coefficients α_k.
3. On reprend ici les notations de la partie précédente.

   (a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $b_n = 0$ puis $a_n = \frac{2n-1}{n}$.

   (b) Établir finalement que, pour tout $n \geqslant 2$,
$$L_n = \frac{2n-1}{n} X L_{n-1} - \frac{n-1}{n} L_{n-2}. \qquad (\star_1)$$

   (c) Montrer que :

      i. $\forall n \geqslant 2$, $n(L_n \mid L_n) = (2n-1)(L_{n-1} \mid XL_n)$.

      ii. $\forall n \geqslant 2$, $(2n-1)(L_{n-2} \mid XL_{n-1}) = (n-1)(L_{n-2} \mid L_{n-2})$.

      iii. $\forall n \geqslant 2$, $(2n+1)(L_n \mid L_n) = (2n-1)(L_{n-1} \mid L_{n-1})$.

   (d) En déduire que, pour tout $n \geqslant 0$, $(L_n \mid L_n) = \frac{2}{2n+1}$.
4. Observer que $(X^2-1)U_n' = 2nXU_n$ et en déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ (X^2-1)L_n'' + 2XL_n' - n(n+1)L_n = 0. \qquad (\star_2)$$
5. (a) Observer que $U_n' = 2nXU_{n-1}$ et en déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ L_n' = XL_{n-1}' + nL_{n-1}. \qquad (\star_3)$$

   (b) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ nL_n = XL_n' - L_{n-1}'. \qquad (\star_4)$$

   Indication : On dérivera $(\star_1)$ et on combinera ce résultat avec $(\star_3)$.

(c) En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ (X^2-1)L_n' = n(XL_n - L_{n-1}). \qquad (\star_5)$$

6. Pour $n \geqslant 1$, on sait que les racines de L_n sont réelles, distinctes et dans $]-1,1[$.
On veut montrer que, pour $n \geqslant 2$, les $(n-1)$ racines de L_{n-1} séparent les n racines de L_n.
On note $-1 < x_1 < \cdots < x_n < 1$ les racines de L_n.
On note $-1 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < 1$ les racines de L_{n-1}.
   (a) Montrer que, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, $L_{n-1}(x_k)$ et $L_n'(x_k)$ ont le même signe.
   (b) En déduire que, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $y_k \in]x_k, x_{k+1}[$.

Partie n° 4 : Quadrature de Gauss

On note $-1 < x_1 < \cdots < x_n < 1$ les racines de L_n.
Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on pose
$$R_k = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \frac{X - x_j}{x_k - x_j} \text{ et } \lambda_k = \int_{-1}^{1} \widetilde{R_k}(t)\ dt.$$

1. En observant que $R_k - 1$ est divisible par $X - x_k$, montrer que $\int_{-1}^1 \widetilde{R_k}(t)\ dt = \int_{-1}^1 \widetilde{R_k^2}(t)\ dt$.
En déduire que les scalaires λ_k sont strictement positifs.
2. Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$,
$$\int_{-1}^{1} \widetilde{P}(t)\ dt = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \widetilde{P}(x_k).$$
Indication : On pourra effectuer la division euclidienne de P par L_n.
3. Soit $\varphi : \mathbb{R}_{2n-1}[X] \to \mathbb{R}^{2n}$ définie par $\varphi(P) = (\widetilde{P}(x_1), \cdots, \widetilde{P}(x_n), \widetilde{P}'(x_1), \cdots, \widetilde{P}'(x_n))$. Montrer que φ est un isomorphisme.
4. Soit f une application dérivable de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tel que
$$\forall 1 \leqslant k \leqslant n,\ \widetilde{P}(x_k) = f(x_k) \text{ et } \widetilde{P}'(x_k) = f'(x_k).$$
Dans la suite de cette partie, ce polynôme sera noté $S(f)$.
5. Montrer que
$$\int_{-1}^{1} f(t)\ dt - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) = \int_{-1}^{1} (f - S(f))(t)\ dt.$$
6. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur $[-1,1]$ et posons $M_{2n} = \max\limits_{x\in[-1,1]} |f^{(2n)}(x)|$.
Soit t un élément de $[-1,1]$ n'appartenant pas à l'ensemble $\{x_1, \cdots, x_n\}$.
On pose $g = f - S(f) - \mu\widetilde{L_n^2}$ où μ est choisi de sorte que $g(t) = 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $c \in [-1,1]$ tel que $g^{(2n)}(c) = 0$.
   (b) En déduire que $\mu = \frac{2^{2n} n!^4}{(2n)!^3} f^{(2n)}(c)$.
   (c) Montrer que,
$$\forall t \in [-1,1],\ |f(t) - S(f)(t)| \leqslant \frac{2^{2n} n!^4}{(2n)!^3} M_{2n} \widetilde{L_n^2}(t).$$
   (d) Conclure que
$$\left| \int_{-1}^{1} f(t)\ dt - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) \right| \leqslant K_n M_{2n} \text{ où } K_n = \frac{2^{2n+1} n!^4}{(2n+1)(2n)!^3}.$$

(e) Évaluer K_n pour $n = 3$ et donner un équivalent de $(K_n)_{n\geqslant 1}$.

(f) Montrer que si $n = 3$, les résultats précédents conduisent à l'approximation :

$$\int_{-1}^{1} f(t)\ dt \approx \frac{1}{9}\left(5f(-\sqrt{3/5}) + 8f(0) + 5f(\sqrt{3/5})\right).$$

Donner un majorant de l'erreur commise et donner des fonctions pour lesquelles cette approximation est une égalité.

* * * FIN DU SUJET * * *