SUJET 17

PARTIE I ETUDE D'UN ENDOMORPHISME

On pose : $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \varphi(P) = (X^2 - 1)\, P'' + (2X + 1)\, P'$.

Q1 Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ.

Q2 n est un élément de $\mathbb{N}$ et φ_n est l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi_n(P) = \varphi(P)$.

a) Ecrire la matrice de φ_n dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Déterminer les valeurs propres de φ_n. Montrer que φ_n est diagonalisable.

Q3 a) Montrer très proprement, par double inclusion, que l'ensemble des valeurs propres de φ est : $\{k(k+1)\,;\ k \in \mathbb{N}\}$.

Préciser la dimension des sous-espaces propres de φ.

b) Soit k un élément de $\mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un polynôme unitaire P_k et un seul qui soit vecteur propre de φ associé à la valeur propre $k\,(k+1)$. Montrer que P_k est de degré k.

c) Calculer P_0, P_1, P_2 et P_3 (**aujourd'hui $\mathbf{P_3}$ est facultatif**).

d) Préciser le coefficient de X^{k-1} dans P_k pour k élément de $[\![1, +\infty[\![$.

Montrer que si k est élément de $[\![2, +\infty[\![$, le coefficient de X^{k-2} dans P_k est : $\dfrac{1-k}{4}$.

e) Montrer que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

PARTIE II UN PRODUIT SCALAIRE CLASSIQUE

Dans cette partie E est l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

Q1 Montrer que pour tout élément h de E, $\displaystyle\int_{-1}^{1} h(t)\,\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t$ existe.

Q2 On pose : $\forall (f, g) \in E^2,\ < f, g >= \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\,\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que $< ., . >$ est un produit scalaire sur E. Nous noterons $\|.\|$ la norme associée.

Q3 Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{R}[X]$.

a) Montrer que $< \varphi(P), Q >= \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t)^{\frac{3}{2}}\,(1+t)^{\frac{1}{2}}\, P'(t)\, Q'(t)\,\mathrm{d}t$ (on pourra commencer à intégrer par parties $\displaystyle\int_a^b \Big((t^2-1)\, P''(t) + 2\,t\, P'(t)\Big)\, Q(t)\,\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t$ en remarquant que la première parenthèse est une dérivée ; être patient...).

b) En déduire alors que $< \varphi(P), Q >=< P, \varphi(Q) >$.

c) Montrer alors que la famille $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est orthogonale.

En déduire que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Q4 On pose pour tout élément n de $\mathbb{N}$ $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} t^n\,\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos(2\,\theta)\big)^n\,\mathrm{d}\theta$.

a) Montrer que pour tout élément h de E : $\displaystyle\int_{-1}^{1} h(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} h\big(\cos(2\,\theta)\big)\,(\sin\theta)^2\,\mathrm{d}\theta$.

b) n est un élément de $\mathbb{N}$. Exprimer I_n en fonction de J_n et de J_{n+1}.

c) Calculer J_0 et J_1. Exprimer J_n en fonction de J_{n-2} pour tout élément n de $[\![2,+\infty[\![$.

Calculer J_{2p} et J_{2p+1} pour tout p dans $\mathbb{N}$.

d) Montrer que $\forall p\in\mathbb{N},\ I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{[2^p\,p!]^2}\,\pi$ et $I_{2p+1} = -\dfrac{(2p+2)!}{[2^{p+1}\,(p+1)!]^2}\,\pi$.

PARTIE III ETUDE DE LA SUITE $(\mathbf{P_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$

Q1 Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

a) En remarquant que $< P_n, 1 >= 0$, montrer que P_n admet au moins un zéro d'ordre de multiplicité impair dans $]-1,1[$.

b) Soient x_1, x_2, ..., x_p les zéros de P_n d'ordre de multiplicité impair situés dans $]-1,1[$ (x_1, x_2, ..., x_p sont deux à deux distincts).

En remarquant que $\big[(X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_p)\,P_n\big]$ garde un signe constant sur $]-1,1[$ montrer que l'on ne peut pas avoir $p<n$.

En déduire que $p=n$ et que $P_n = (X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_n)$.

Q2 Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X],\ < Q, P_{n+2} - X\,P_{n+1} >= 0$ (remarquer que $< A, BC >=< AB, C >$...).

b) Préciser le terme de plus haut degré de $P_{n+2} - X\,P_{n+1}$ pour tout n dans $\mathbb{N}$ (utiliser I Q3 d)).

c) Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Montrer que $P_{n+2} - X\,P_{n+1}$ est combinaison linéaire de la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ puis de la famille (P_n) !

Montrer que $P_{n+2} - X\,P_{n+1} = -\dfrac{1}{4}\,P_n$.

Q3 a) calculer $P_{2p}(0)$ et $P_{2p+1}(0)$ pour tout élément p de $\mathbb{N}$.

b) Montrer, en gérant une suite définie par une relation linéaire de récurrence d'ordre 2, que $\forall n\in\mathbb{N},\ P_n(1) = \dfrac{2n+1}{2^n}\cdot$

Q4 n appartient à $\mathbb{N}$. Montrer que :

a) $< P_n, P_n >=< P_n, X^n >$;

b) $< P_n, X^{n+1} >= -\dfrac{1}{2} < P_n, P_n >$;

c) $< P_n, X^{n+2} >= \dfrac{n+2}{4} < P_n, P_n >$.

Q5 On pose pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $u_n =< P_n, P_n >$.

a) Utiliser II Q4 pour calculer u_0 et u_1.

b) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2} - \dfrac{n+3}{4}\,u_{n+1} = -\dfrac{n+2}{16}\,u_n$.

c) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N},\ \|P_n\| = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^n}\cdot$

PARTIE IV APPROXIMATION D'UN ÉLÉMENT DE E PAR UNE SUITE DE POLYNÔMES

Soit f un élément de E.

Q1 n est un élément de $\mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique élément S_n de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\|f - S_n\|$ soit minimal.

Montrer que $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{< f, P_k >}{\|P_k\|^2} P_k$. Exprimer $\|f - S_n\|^2$ en fonction de $\|f\|^2$ et $\|S_n\|^2$. Calculer $\|S_n\|^2$.

Q2 Montrer que la série de terme général $\dfrac{(< f, P_k >)^2}{\|P_k\|^2}$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(< f, P_k >)^2}{\|P_k\|^2} \leqslant \|f\|^2$.

Soit g une fonction numérique continue sur un segment $[a, b]$. Le théorème de Weirstrass indique que pour tout réel strictement positif ε', il existe un élément $P_{\varepsilon'}$ de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\displaystyle\operatorname*{Max}_{t\in[a,b]} |g(t) - P_{\varepsilon'}(t)| < \varepsilon'$.

Q3 On se propose de montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|f - S_n\| = 0$. Soit ε un réel strictement positif.

a) Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $\|f - Q\| < \varepsilon$.

b) En déduire qu'il existe p dans $\mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in [\![p, +\infty[\![,\ \|f - S_n\| < \varepsilon$. Conclure.

c) Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(< f, P_k >)^2}{\|P_k\|^2} = \|f\|^2$.