# SUJET 8

Dans toute la suite $E = \mathbb{R}[X]$ et pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

## PARTIE I

**Q1** Montrer que pour toute application continue $f$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t}}\,dt$ est absolument convergente.

**Q2** On pose pour tout élément $n$ de $\mathbb{N}$ : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ converge (on pourra étudier sa monotonie).

**Q3** Montrer que pour $n$ dans $\mathbb{N}^*$ :

$$(2n+1)\,I_n = (2n)\,I_{n-1}$$

(on pourra faire une intégration par parties... $u(t) = t^n$...)

Etudier la nature de la série de terme général $v_n = \ln I_n - \ln I_{n-1}$ et en déduire que la limite de la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est 0.

**Q4** Pour tout élément $n$ de $\mathbb{N}$, on pose : $J_n = \sqrt{n}\;I_n$ et $K_n = \sqrt{n+1}\;I_n$. Montrer que les suites $(J_n)_{n\geqslant 0}$ et $(K_n)_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes. En déduire qu'il existe un réel strictement positif $\alpha$ tel que : $I_n \sim \dfrac{\alpha}{\sqrt{n}}$

**Q5** Pour $n$ dans $\mathbb{N}$ exprimer $I_n$ à l'aide de factorielles (le texte permet de vérifier le résultat... j'exige ici une récurrence).

Calculer $\alpha$ en utilisant la formule de Stirling ($n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$). Le monde à l'envers non ? Commenter cette dernière assertion en deux lignes pleines d'humour (ou en un mot... de trois lettres).

**Q6** Pour $p$ et $q$ dans $\mathbb{N}$ on pose $u_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^p(1-t)^q}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$.

Calculer $u_{0,r}$ pour $r$ dans $\mathbb{N}$ (question qui n'est pas dans la correction).

Exprimer $u_{p,q}$ en fonction de $u_{p-1,q+1}$ pour $p$ dans $\mathbb{N}^*$ et $q$ dans $\mathbb{N}$ ($u_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^{q-1/2}\,\mathrm{d}t$).

En déduire que si $p$ et $q$ sont dans $\mathbb{N}$ : $u_{p,q} = \dfrac{2^{2p+1}p!\,(p+q)!\,(2q)!}{q!\,(2p+2q+1)!}$

(prendre son temps ; je n'exige pas de récurrence mais je veux une justification assez explicite).

## PARTIE II

$\boxed{\textbf{Q7}}$ On pose pour tout couple $(P, Q)$ d'éléments de $E = \mathbb{R}[X]: < P, Q >= \displaystyle\int_0^1 \frac{P(t)\,Q(t)}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire $< .,. >$ sur $E$. On note $\|.\|$ la norme associée.

$\boxed{\textbf{Q8}}$ Montrer que pour tout élément $A$ de $E$ l'application $\varphi_A$ qui à tout élément $P$ de $E$ associe $AP$ est un endomorphisme symétrique de $E$.

$\boxed{\textbf{Q9}}$ Soit $A$ un élément non nul de $E$. $a$ est le degré de $A$. On note $r_A$ l'application qui à un élément $P$ de $E$ associe le reste dans la division de $P$ par $A$.

-a) Rappeler le théorème de la division euclidienne. Préciser l'image par $r_A$ d'un élément $P$ de $E$ dont le degré est strictement inférieur à celui de $A$ (cette question n'est pas dans la correction).

a) Montrer que $r_A$ est un endomorphisme de $E$. Montrer que $r_A$ est une projection de $E$. Caractériser les éléments de $\operatorname{Ker} r_A$. Montrer que si $a$ n'est pas nul : $\operatorname{Im} r_A = \mathbb{R}_{a-1}[X]$ ; et si $a = 0$ ?

b) Montrer (en raisonnant par l'absurde) que si le degré de $A$ n'est pas nul, $r_A$ n'est pas une projection orthogonale (établir et exploiter l'égalité : $< 1, A^2 >=< A, A >$).

$\boxed{\textbf{Q10}}$ $n$ appartient à $\mathbb{N}$ et $A$ est un élément non nul de $E_n$. Soit $a$ son degré. On note $r'_A$ la restriction de $r_A$ à $E_n$.

a) Montrer que $r'_A$ peut être considérée comme un projection de $E_n$. Montrer que $r'_A$ est la projection sur $\operatorname{Vect}(1, X, \ldots, X^{a-1})$ parallèlement à $\operatorname{Vect}(A, AX, \ldots, AX^{n-a})$.

b) Montrer que si $0 < a < n$ cette projection n'est pas orthogonale (raisonner par l'absurde et montrer que $< A, A >= 0$ en passant par $< X^k, AX^i >= 0$ pour ...).

c) Ici $a = n > 0$. Repréciser le noyau et l'image de $r'_A$. En déduire que $r'_A$ est une projection orthogonale si et seulement si $A$ appartient à l'orthogonal $D_n$ de $E_{n-1}$ dans $E_n$. Préciser la dimension de $D_n$.

Montrer alors qu'il existe un unique polynôme $A_n$ de degré $n$, de norme 1, dont le coefficient du terme de plus haut degré est positif et tel que $r'_{A_n}$ soit une projection orthogonale de $E_n$.

$\boxed{\textbf{Q11}}$ a) En déduire l'existence et l'unicité d'une suite $(P_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $E$ vérifiant

i) $(P_n)_{n\geqslant 0}$ est une famille orthonormale d'éléments de $E$.
ii) Pour tout élément $n$ de $\mathbb{N}$, $P_n$ est de degré $n$ et le coefficient de $X^n$ dans $P_n$ est positif.

b) Calculer $P_0$ et $P_1$.

$\boxed{\textbf{Q12}}$ $n$ est un élément de $[\![2, +\infty[\![$.

a) Montrer qu'il existe deux réels $u_n$ et $v_n$ tels que : $P_{n+1} = (u_n X + v_n)P_n + r_{P_n}(P_{n+1})$.

b) Démontrer que si $k$ appartient à $[\![0, n-2]\!]$ alors $< r_{P_n}(P_{n+1}), P_k >= 0$ ($< AX, B >=< A, XB >$).

c) En remarquant que $(P_0, P_1, \ldots, P_{n-1})$ est une base orthonormale de $E_{n-1}$, montrer qu'il existe un réel $w_n$ tel que :

$$P_{n+1} = (u_n X + v_n)P_n + w_n P_{n-1}$$

## PARTIE III

$F$ est ici l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Nous considérerons que $E$ est un sous-espace de $F$ ( !).

**Q13** On note $\Phi$ l'application qui à tout élément $f$ de $F$ associe $x \to \sqrt{1-x}\displaystyle\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$.

a) Soit $f$ un élément de $F$. Montrer que $\Phi(f)$ est une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $[0,1[$ et continue sur $[0,1]$.

b) Montrer que $\Phi$ est un endomorphisme injectif de $F$.

c) Soit $f$ un élément de $F$ ; calculer $\Phi(f)(1)$. $\Phi$ est-il Surjectif ?

**Q14** On rappelle que $E = \mathbb{R}[X]$ et que l'on confond $E$ avec l'ensemble des applications polynômiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$... ou de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

a) Calculer $h_p = \Phi\Big((X-1)^p\Big)$ pour tout élément $p$ de $\mathbb{N}$.

En déduire que $\Phi\Big(\text{Vect}\left(1, X-1, (X-1)^2, \ldots, (X-1)^p\right)\Big) = \text{Vect}\left(X-1, (X-1)^2, \ldots, (X-1)^{p+1}\right)$ pour tout élément $p$ de $\mathbb{N}$.

Déduire très proprement de ce qui précède que $E$ est stable par $\Phi$ et que $\Phi(E)$ est l'ensemble des éléments de $E$ divisible par $X-1$.

b) $n$ est dans $\mathbb{N}^*$. S'inspirer de ce qui précède pour caractériser les éléments de $\Phi^n(E)$ ($\Phi^n = \Phi \circ \Phi \circ \cdots \circ \Phi$). Valider le résultat obtenu pour $n = 0$.

**Q15** Soit $P$ un élément de $\Phi(E)$.

a) Montrer qu'il existe un unique élément $\widehat{P}$ de $E$ tel que $\Phi(\widehat{P}) = P$.

b) On pose pour tout $x$ dans $[0,1[ : g(x) = \dfrac{P(x)}{\sqrt{1-x}}$. Montrer que $\forall x \in [0,1[,\ \widehat{P}(x) = -\sqrt{1-x}\ g'(x)$.

c) Montrer que si $\lambda$ est une racine de $P$ d'ordre $k$, $\lambda$ est une racine de $\widehat{P}$ d'ordre $k-1$.

**Q16** $n$ est élément de $\mathbb{N}^*$ et $P$ appartient à $\Phi^n(E)$.

a) Montrer qu'il existe un unique élément $R_n$ de $E$ tel que $\Phi^n(R_n) = P$.

b) Donner une expression simple de $R_n(x)$ en fonction de la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $g$, pour tout élément $x$ de $[0,1[$.

**Q17** a) Montrer que si $P$ et $Q$ sont deux éléments de $E$ :

$$< P, Q >= Q(0) < 1, P > + < Q', \Phi(P) >$$

b) En déduire que si $n$ est dans $\mathbb{N}$ et $P$ dans $E$ :

$$P \in (E_{n+1})^{\perp} \iff < 1, P >= 0 \text{ et } \Phi(P) \in (E_n)^{\perp}$$

c) Exprimer, pour $P$ dans $\Phi(E)$, $< 1, \widehat{P} >$ en fonction de $P(0)$.

**Q18** On pose $A = X(1-X)$.

a) Montrer que pour tout élément $n$ de $\mathbb{N}$ il existe un unique élément $H_n$ de $E$ tel que : $\Phi^n(H_n) = A^n$.

b) Préciser le degré de $H_n$ pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$.

c) $n$ appartient à $\mathbb{N}^*$ ; $H_n$ appartient-il à $(E_{n-1})^\perp$ ?

d) Soit $p$ et $q$ deux éléments distincts de $\mathbb{N}$. Montrer que $< H_p, H_q >= 0$.

**Q19** Montrer qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ de réels positifs telle que : $H_n = \alpha_n P_n$ pour tout élément $n$ de $\mathbb{N}$.

**Q20** a) Montrer que pour tout élément $n$ de $\mathbb{N}^*$ :

$$||H_n||^2 = n! \prod_{k=0}^{n-1}(n+k+\frac{1}{2}) \ < 1, A^n >$$

b) En utilisant $IQ6$, montrer que pour tout élément $n$ de $\mathbb{N}$ :

$$\alpha_n = \frac{n!}{\sqrt{2n+\frac{1}{2}}}$$

c) Quel est, pour tout $n$ élément de $\mathbb{N}$, le terme de plus haut degré de $P_n$ ? En déduire la valeur du coefficient $u_n$ de Q12.

---

PARTIE I

(Q1) $f$ est continue sur $[0,1]$ donc 1) $g_f : t \mapsto \frac{f(t)}{\sqrt{1-t}}$ est continue sur $[0,1[$

2) $f$ est bornée sur le segment $[0,1]$, donc : $\exists M \in \mathbb{R}_+$, $\forall t \in [0,1]$, $|f(t)| \leq M$.

Ainsi $g_f$ est continue sur $[0,1[$ et $\forall t \in [0,1[$, $|g_f(t)| \leq \frac{M}{\sqrt{1-t}} = \frac{M}{(1-t)^{1/2}}$.

La positivité de $|g_f|$, la convergence de $\int_0^1 \frac{M}{(1-t)^{1/2}}\,dt$ et les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent la convergence de $\int_0^1 |g_f(t)|\,dt$.

$\int_0^1 g_f(t)\,dt$ est alors absolument convergente.

<u>Si $f$ est une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, $\int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t}}\,dt$ est absolument convergente.</u>

(Q2) D'après Q1, $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t}}\,dt$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ (la restriction de $t \mapsto t^n$ à $[0,1]$ est continue).

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1[$, $0 \leq \frac{t^{n+1}}{\sqrt{1-t}} \leq \frac{t^n}{\sqrt{1-t}}$ ; donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{\sqrt{1-t}}\,dt \leq \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t}}\,dt$

<u>$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$.</u> $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et minorée par 0 donc <u>$(I_n)_{n\geq 0}$ converge.</u>

(Q3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in ]0,1[$

$$\int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{1-t}}\,dt = \int_0^x \underset{u}{t^n}\,\underset{v'}{(1-t)^{-1/2}}\,dt = \left[t^n\left(-2(1-t)^{1/2}\right)\right]_0^x - \int_0^x n t^{n-1}\left(-2(1-t)^{1/2}\right)dt.$$

$$\int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{1-t}}\,dt = -2x^n(1-x)^{1/2} + 2n\int_0^x t^{n-1}\sqrt{1-t}\,dt = -2x^n(1-x)^{1/2} + 2n\int_0^x \frac{t^{n-1}(1-t)}{\sqrt{1-t}}\,dt.$$

$$\int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{1-t}}\,dt = -2x^n(1-x)^{1/2} + 2n\int_0^x \frac{t^{n-1}}{\sqrt{1-t}}\,dt - 2n\int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{1-t}}\,dt.$$

$\lim_{x\to 1}\left(-2x^n(1-x)^{1/2}\right) = 0$ et donc $I_n = 2n I_{n-1} - 2n I_n$.

<u>$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(2n+1) I_n = 2n I_{n-1}$.</u>

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $v_n = \ln I_n - \ln I_{n-1} = \ln \frac{I_n}{I_{n-1}} = \ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right) \sim \frac{2n}{2n+1} - 1 = -\frac{1}{2n+1} \sim -\frac{1}{2n}$

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $-v_n = -\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right) = \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) \geq 0$ et $-v_n \sim \frac{1}{2n}$.

La série de terme général $\frac{1}{2n}$ étant divergente il en est de même pour la série de terme général $-v_n$ (règle de comparaison des séries à termes positifs).

La série de terme général $-v_n$ est divergente et à termes positifs donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n}(-v_k) = +\infty$ ; ainsi : $+\infty = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}(\ln I_{k-1} - \ln I_k)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\ln I_0 - \ln I_n\right]$

$\ln I_0$ étant une constante il vient : $\lim\limits_{n\to+\infty}(-\ln I_n) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln I_n) = -\infty$.

Ainsi $\underline{\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0.}}$

**Exercice..** Retrouver ce résultat à la main (Fixer $\varepsilon$ dans $\mathbb{R}^*_+$ et noter que l'on peut trouver $\hat{\alpha}\in]0,1[$ tel que : $0 \leq I_n \leq \int_0^{\hat{\alpha}} \frac{t^n}{\sqrt{1-t}}\,dt + \int_{\hat{\alpha}}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-\hat{\alpha}}}\int_0^{\hat{\alpha}} t^n\,dt + \frac{\varepsilon}{2}$ !!)

Q4 Soit $n\in[\![1,+\infty[\![$. $J_n = \sqrt{n}\, I_n = \sqrt{n}\,\frac{2n}{2n+1} I_{n-1} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}\,\frac{2n}{2n+1} J_{n-1}$.

Or $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}\,\frac{2n}{2n+1} = \sqrt{\frac{4n^3}{(n-1)(2n+1)^2}} = \sqrt{\frac{4n^3}{4n^3-3n-1}} \geq 1$ car $4n^3 \geq 4n^3-3n-1$ !

Ainsi $J_n \geq J_{n-1}$ ... car $J_{n-1}$ est positif non ! ce qui vaut encore pour $n=1$ car $J_1 \geq 0 = J_0$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $J_n \geq J_{n-1}$ ; $\underline{\underline{(J_n)_{n\geq 0} \text{ est croissante.}}}$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $K_n = \sqrt{n+1}\, I_n = \sqrt{n+1}\,\frac{2n}{2n+1} I_{n-1} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\,\frac{2n}{2n+1} K_{n-1} = \frac{\sqrt{n+1}\sqrt{4n}}{\sqrt{(2n+1)^2}} K_{n-1}$.

Donc $K_n = \frac{\sqrt{4n^2+4n}}{\sqrt{4n^2+4n+1}} K_{n-1} \leq K_{n-1}$ car $K_{n-1} \geq 0$ et $4n^2+4n \leq 4n^2+4n+1$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $K_n \leq K_{n-1}$. $\underline{\underline{(K_n)_{n\geq 0} \text{ est décroissante.}}}$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $J_n - K_n = (\sqrt{n}-\sqrt{n+1})\, I_n = -\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} I_n$. Posons $L = \lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

$\underline{\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}(J_n - K_n) = 0 \times 0 = 0.}}$

Ceci achève de prouver que les suites $\underline{(J_n)_{n\geq 0} \text{ et } (K_n)_{n\geq 0} \text{ sont adjacentes}}$.

$(J_n)_{n\geq 0}$ et $(K_n)_{n\geq 0}$ sont donc convergentes et ont la même limite. Soit $\alpha$ cette limite.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $J_n\leq \alpha\leq K_n$. Donc $\alpha\geq J_1 = I_1 = \int_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t}} > 0$.

Ainsi $\alpha>0$ ; en particulier : $\alpha\neq 0$ !

Donc $J_n \sim \alpha$ ; $\sqrt{n}\,I_n \sim \alpha$ ; $\underline{I_n \sim \frac{\alpha}{\sqrt{n}}}$ avec $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$.

**Q5**. $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Une légère induction donne alors $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $I_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}\, I_0$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{2^n n!}{\prod_{k=1}^{n}(2k+1)} I_0$. Or $\prod_{k=1}^{n}(2k+1) = (2n+1)(2n-1)\ldots 3 = \frac{(2n+1)!}{(2n)(2n-2)\ldots 2} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$

De plus $I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \lim_{x\to 1} \left[-2\sqrt{1-t}\right]_0^x = 2$.

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{[2^n n!]^2}{(2n+1)!}\times 2$. Ceci vaut aussi pour $n=0$.

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}$, $\underline{\underline{I_n = 2\frac{[2^n n!]^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}}}$.

$$\frac{\alpha}{\sqrt{n}} \sim I_n = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} \sim \frac{2^{2n+1}\,2\pi n\,(n/e)^{2n}}{\sqrt{2\pi(2n+1)}\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}} \sim \frac{2^{2n+1}(2\pi n)\,e\,n^{2n}}{\sqrt{4\pi n}\,(2n+1)^{2n}(2n+1)} \quad \text{OK!}$$

$$\frac{\alpha}{\sqrt{n}} \sim \frac{4\pi n}{\sqrt{4\pi n}}\times e\times\frac{1}{2n+1}\times\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}\,e}{2n}\, e^{2n\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right)}$$

Or $2n\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right) \sim 2n\left(\frac{2n}{2n+1}-1\right) = \frac{-2n}{2n+1} \sim -1$ ; $\lim_{n\to+\infty} 2n\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right) = -1$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} e^{2n\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right)} = e^{-1}$

Donc $\frac{\alpha}{\sqrt{n}} \sim \frac{2\sqrt{\pi}\sqrt{n}\,e}{2n}\times e^{-1} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$ ; $\alpha \sim \sqrt{\pi}$ !!

Ce deux suites constantes équivalentes sont égales, n'est-il pas ?

Finalement $\underline{\underline{\alpha = \sqrt{\pi}}}$.

Commentaires en 1 ligne : comme disait mon beauf c'est de la daube !

C'est Wallis qui donne Stirling !

C'est $\int_0^{\pi/2}(\sin t)^n\,dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ qui donne $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ non ?

Or ici c'est le cas en effet $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t}}\,dt \underset{t=\sin^2\theta}{=} 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}\theta\, d\theta \ldots$

(Q6) Soit $p\in\mathbb{N}^*$ et $q\in\mathbb{N}$. D'après Q1, $u_{p,q}$ et $u_{p-1,q+1}$ existent.

Soit $x\in[0,1[$. $\int_0^x \frac{t^p(1-t)^q}{\sqrt{1-t}}\,dt = \int_0^x \underset{u}{t^p}\,\underset{v'}{(1-t)^{q-\frac{1}{2}}}\,dt = \left[t^p\frac{(1-t)^{q-\frac{1}{2}+1}}{-(q-\frac{1}{2}+1)}\right]_0^x - \int_0^x p\,t^{p-1}\frac{(1-t)^{q-\frac{1}{2}+1}}{-(q-\frac{1}{2}+1)}\,dt$

$$\int_0^x \frac{t^p(1-t)^q}{\sqrt{1-t}}\,dt = \frac{x^p(1-x)^{q+\frac{1}{2}}}{-(q+\frac{1}{2})} + \frac{p}{q+\frac{1}{2}}\int_0^x \frac{t^{p-1}(1-t)^{q+1}}{\sqrt{1-t}}\,dt .$$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^p(1-x)^{q+\frac{1}{2}}}{-(q+\frac{1}{2})} = 0$ donc $u_{pq} = \frac{p}{q+\frac{1}{2}}\,u_{p-1,q+1}$.

$$\underline{\underline{\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \forall q\in\mathbb{N},\quad u_{p,q} = \frac{2p}{2q+1}\,u_{p-1,q+1}.}}$$

Une légère induction donne : $u_{p,q} = \frac{2p}{2q+1}\times\frac{2(p-1)}{2q+3}\times\cdots\times\frac{2(p-k+1)}{2q+2k-1}\,u_{p-k,q+k}$, puis :

$$u_{p,q} = \frac{2p}{2q+1}\times\frac{2(p-1)}{2q+3}\times\cdots\times\frac{2\times 1}{2q+2p-1}\,u_{0,q+p} = \frac{2^p\,p!}{(2q+1)(2q+3)\cdots(2q+2p-1)}\,u_{0,q+p}$$

Or $u_{0,q+p} = \int_0^1 \frac{(1-t)^{q+p}}{\sqrt{1-t}}\,dt = \int_0^1 (1-t)^{q+p-\frac{1}{2}}\,dt = \left[\frac{(1-t)^{q+p-\frac{1}{2}+1}}{-(q+p-\frac{1}{2}+1)}\right]_0^1 = -\frac{1}{-(q+p+\frac{1}{2})}$

$$u_{0,q+p} = \frac{1}{q+p+\frac{1}{2}} = \frac{2}{2p+2q+1}.$$

$$u_{p,q} = \frac{2^p\times p!\times(2q+2)(2q+4)\cdots(2p+2q)}{(2q+1)(2q+2)(2q+3)\cdots(2q+2p-2)(2q+2p-1)(2q+2p)}\times\frac{2}{(2p+2q+1)}$$

$$u_{pq} = \frac{2^p\times p!\ \ 2^p(q+1)(q+2)\cdots(q+p)\times 2}{\frac{(2p+2q+1)!}{(2q)!}} = 2^{2p+1}\,\frac{p!\ (p+q)!\ (2q)!}{q!\ (2p+2q+1)!}.$$

Résultat que l'on peut confirmer par récurrence : $\forall (p,q)\in\mathbb{N}^2,\ u_{pq} = \frac{2^{2p+1}\,p!\,(p+q)!\,(2q)!}{q!\,(2p+2q+1)!}$.

## PARTIE II

**Q7** Notons que si P et Q sont deux éléments de E la restriction de PQ à $[0,1]$ est continue sur $[0,1]$ donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t}}\,dt$ existe.

• Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et $(P,Q,R)\in E^3$, $\displaystyle\langle P,\lambda Q+R\rangle=\int_0^1 \frac{P(t)(\lambda Q(t)+R(t))}{\sqrt{1-t}}\,dt=\int_0^1\left(\lambda\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t}}+\frac{P(t)R(t)}{\sqrt{1-t}}\right)dt$

Toutes les intégrales convergent

$$\underline{\langle P,\lambda Q+R\rangle}=\lambda\int_0^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t}}\,dt+\int_0^1\frac{P(t)R(t)}{\sqrt{1-t}}\,dt=\underline{\lambda\langle P,Q\rangle+\langle P,R\rangle}.$$

• $\displaystyle\forall (P,Q)\in E^2,\ \underline{\langle P,Q\rangle}=\int_0^1\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t}}\,dt=\int_0^1\frac{Q(t)P(t)}{\sqrt{1-t}}\,dt=\underline{\langle Q,P\rangle}.$

• Soit $P\in E$. $\forall t\in[0,1[$, $\dfrac{P(t)P(t)}{\sqrt{1-t}}\geq 0$ donc $\displaystyle\langle P,P\rangle=\int_0^1\frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t}}\,dt\geq 0$.

Supposons $\langle P,P\rangle=0$. Fixons $\alpha$ dans $]0,1[$.

$$0\leq\int_0^\alpha\frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t}}\,dt\leq\int_0^1\frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t}}\,dt=\langle P,P\rangle=0.$$

Ainsi $t\mapsto\dfrac{P^2(t)}{\sqrt{1-t}}$ est positive, continue et d'intégrale nulle sur $[0,\alpha]$

donc $\forall t\in[0,\alpha]$, $\dfrac{P^2(t)}{\sqrt{1-t}}=0$. $\forall t\in[0,\alpha]$, $P(t)=0$. $P\in\mathbb{R}[X]$ a une infinité de zéros ; c'est le polynôme nul.

$\underline{\forall P\in E,\ \langle P,P\rangle\geq 0}$ et $\underline{\forall P\in E,\ \langle P,P\rangle=0\Rightarrow P=0}$

Ce qui précède montre que $\underline{\langle\cdot,\cdot\rangle \text{ est un produit scalaire sur } E}$.

Soit $A\in E$

**Q8** • $\forall P\in E$, $\varphi_A(P)=AP\in E$

• $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\forall(P,Q)\in E^2$, $\varphi_A(\lambda P+Q)=A(\lambda P+Q)=\lambda AP+AQ=\lambda\varphi_A(P)+\varphi_A(Q)$.

• $\displaystyle\forall(P,Q)\in E^2,\ \langle\varphi_A(P),Q\rangle=\int_0^1\frac{[\varphi_A(P)Q](t)}{\sqrt{1-t}}\,dt=\int_0^1\frac{A(t)P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t}}\,dt=\int_0^1\frac{P(t)(AQ)(t)}{\sqrt{1-t}}\,dt=\langle P,\varphi_A(Q)\rangle$

Ce qui précède montre que $\underline{\varphi_A \text{ est un endomorphisme symétrique de } E}$.

**Q9** a) Soit $A\in E$. Montrons que $r_A$ est un endomorphisme de E.

$r_A$ est clairement une application de E dans E.

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et soit $(P_1,P_2)\in E^2$.

$\exists (Q_1, Q_2) \in E^2$, $P_1 = AQ_1 + r_A(P_1)$ et $P_2 = AQ_2 + r_A(P_2)$.

$\lambda P_1 + P_2 = A(\lambda Q_1 + Q_2) + (\lambda r_A(P_1) + r_A(P_2))$.

Or $\deg(\lambda r_A(P_1) + r_A(P_2)) < \deg A$ car : $\deg r_A(P_1) < \deg A$ et
$\deg r_A(P_2) < \deg A$

Ainsi peut-on dire que $\lambda r_A(P_1) + r_A(P_2)$ est le reste dans la division de $\lambda P_1 + P_2$ par $A$.

Donc $r_A(\lambda P_1 + P_2) = \lambda r_A(P_1) + r_A(P_2)$.

$r_A$ est un endomorphisme de $E$.

Pour montrer que $r_A$ est une projection il ne reste plus qu'à montrer que : $r_A \circ r_A = r_A$.

Soit $P \in E$. Posons $S = r_A(P)$.

$S = 0 \times A + S$ avec $\deg S = \deg r_A(P) < \deg A$.

Donc $S$ est le reste dans la division de $S$ par $A$ ; $r_A(S) = S$ ; $r_A(r_A(P)) = r_A(P)$.

Finalement $r_A \in \mathcal{L}(E)$ et $r_A \circ r_A = r_A$ ; $r_A$ est une projection.

Soit $P \in E$. $P \in \operatorname{Ker}(r_A) \iff r_A(P) = 0 \iff$ le reste dans la division de $P$ par $A$ est nul

$P \in \operatorname{Ker}(r_A) \iff A$ divise $P$.

$\operatorname{Ker} r_A = \{ QA \,;\, Q \in E \}$.

Clairement $\operatorname{Im} r_A \subset \mathcal{S} = \{ S \in E \mid \deg S < \deg A \}$.

Réciproquement soit $S \in \mathcal{S}$. $\deg S < \deg A$ et $S = 0 \times A + S$ donc
$r_A(S) = S$ et ainsi $S \in \operatorname{Im} r_A$.

Finalement $\operatorname{Im} r_A = \{ S \in E \mid \deg S < \deg A \}$.

Si $a = \deg A = 0$ : $\operatorname{Im} r_A = \{0_E\}$ et $r_A = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Si $a = \deg A \geq 1$ : $\operatorname{Im} r_A = \mathbb{R}_{\deg A - 1}[X] = \mathbb{R}_{a-1}[X]$.

b) Supposons $\deg A \geq 1$.

$1 \in \operatorname{Im} r_A$ et $A^2 \in \operatorname{Ker} r_A$ , $\langle 1, A^2 \rangle = \langle 1, \varphi_A(A) \rangle = \langle \varphi_A(1), A \rangle = \langle A, A \rangle = \|A\|^2 \neq 0$

Ainsi $\operatorname{Im} r_A$ et $\operatorname{Ker} r_A$ ne sont pas orthogonaux.

Si $\deg A \geq 1$ : $r_A$ n'est pas une projection orthogonale.

Remarque..
$(\operatorname{Ker} r_A)^\perp = (\operatorname{Im} \varphi_A)^\perp = \{0_E\}$

**Q10** a) $\forall P \in E_n$, $\deg r_A(P) < \deg A \leq n$ car $A \in E_n$.

Donc $\forall P \in E_n$, $r'_A(P) = r_A(P) \in E_n$.

$r'_A$ est donc une application de $E_n$ dans $E_n$ ou presque... $r'_A$ est linéaire car $r_A$ l'est.

De plus $r_A \circ r_A = r_A$ donc $r'_A \circ r'_A = r'_A$.

b) Ainsi $r'_A$ peut être considérée comme une projection de $E_n$.

Supposons $0 < a = \deg A < n$.

Notons que $\operatorname{Ker} r'_A$ est l'ensemble des éléments de $E_n$ divisibles par $A$.

Ainsi $\operatorname{Ker} r'_A = \{AQ \,;\, Q \in E_{n-a}\}$

$\operatorname{Ker} r'_A = \{A(\alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_{n-a} X^{n-a}) \,;\, (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-a}) \in \mathbb{R}^{n-a+1}\}$

$\operatorname{Ker} r'_A = \operatorname{Vect}(A, AX, AX^2, \dots, AX^{n-a})$

De plus $\operatorname{Im} r'_A = E_{a-1} = \operatorname{Vect}(1, X, X^2, \dots, X^{a-1})$.

Supposons que $\operatorname{Ker} r'_A$ et $\operatorname{Im} r'_A$ soient orthogonaux. ok... $\varphi_A$ est symétrique.

$\forall k \in [\![0, a-1]\!]$, $\forall i \in [\![0, n-a]\!]$, $0 = \langle X^k, AX^i \rangle = \langle X^{k+i}, A \rangle$

donc $\forall j \in [\![0, n-1]\!]$, $\langle X^j, A \rangle = 0$

Ainsi $A$ est orthogonal à $E_{n-1}$ et $A \in E_{n-1}$ ! $\langle A, A \rangle = 0$. $\|A\|^2 = 0$. $A = 0$ !!

Si $0 < \deg A < n$ : $r'_A$ n'est pas une projection orthogonale.

c) $a = n > 0$. $\operatorname{Ker} r'_A = \{AQ \,;\, Q \in E_{n-n}\} = \{\lambda A \,;\, \lambda \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}(A)$.

$\operatorname{Im} r'_A = E_{a-1} = E_{n-1} = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$\operatorname{Ker} r'_A = \operatorname{Vect}(A)$ et $\operatorname{Im} r'_A = \mathbb{R}_{n-1}[X] = E_{n-1}$.

$\operatorname{Ker} r'_A$ et $\operatorname{Im} r'_A$ sont orthogonaux si $A$ est orthogonal à $\operatorname{Im} r'_A = E_{n-1}$

Ainsi : $r'_A$ est une projection orthogonale si et seulement si $A \in E_{n-1}^{\perp} \cap E_n = D_n$

Notons $D_n$ l'orthogonale de $E_{n-1}$ dans $E_n$. $D_n$ est une droite vectorielle.

$\exists U_n \in E_n$, $U_n \neq 0$ et $D_n = \operatorname{Vect}(U_n)$.

$U_n$ est nécessairement de degré $n$ car sinon $D_n$ est à la fois dans $E_{n-1}$ et dans l'orthogonale de $E_{n-1}$ dans $E_n$ et ainsi $U_n$ est nul.

Notons $a_n$ le coefficient de $X^n$ dans $U_n$.

Soit $P$ un élément non nul de $D_n$. $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$, $P = \lambda U_n$.

$\deg P = n$ et le coefficient de $X^n$ dans $P$ est $\lambda a_n$.

$\|P\| = 1 \Leftrightarrow |\lambda| \, \|U_n\| = 1 \Leftrightarrow \lambda = + 1/\|U_n\|$ ou $\lambda = -1/\|U_n\|$.

$H_1 = \frac{1}{\|U_n\|} U_n$ et $H_2 = -\frac{1}{\|U_n\|} U_n$ sont les deux seuls éléments de $D_n$ de norme $1$.

Si $a_n > 0$ (resp. $a_n < 0$) le coefficient de $X^n$ dans $H_1$ est positif (resp. négatif) et celui de $H_2$ est négatif (resp. positif).

Ainsi $D_n$ contient un unique élément de degré $n$ de norme $1$ et dont le coefficient de $X^n$ est positif.

Ainsi il existe un unique polynôme $A_n$ de degré $n$ tel que $\|A_n\| = 1$, dont le coefficient du terme de plus haut degré est positif et tel que $r_{A_n}$ soit une projection orthogonale de $E_n$.

(Q11) Analyse / Unicité. Supposons que $(P_n)_{n \geq 0}$ soit solution.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $P_n \in E_n$ et $P_n$ est orthogonal à $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$.

$\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\deg P_k = k$. $(P_0, P_1, \dots, P_{n-1})$ est alors une famille de $n$ éléments de $E_{n-1}$ de degrés échelonnés ; $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ est une base de $E_{n-1}$.

Ainsi $P_n \in E_n$ $P_n \in E_{n-1}^{\perp}$ donc $P_n \in D_n$.

$P_n \in D_n$, $\|P_n\| = 1$, $\deg P_n = n$, le coefficient de $X^n$ dans $P_n$ est positif ; ainsi $P_n = A_n$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = A_n$.

2) $P_0 \in E_0$. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $P_0 = \lambda$. Mieux $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ car $\deg P_0 = 0$ et le coefficient de $X^0$ dans $P_0$ est positif.

$1 = \|P_0\| = |\lambda| \, \|1\| = \lambda \|1\|$ ; $P_0 = \dfrac{1}{\|1\|}$.

Ceci achève de prouver l'unicité de la famille $(P_n)_{n \geq 0}$.

Synthèse / Existence. Posons $P_0 = \frac{1}{\|1\|}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = A_n$.

Clairement pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P_n$ est de degré $n$, de norme $1$ et le coefficient de $X^n$ dans $P_n$ est positif.

Il ne reste donc plus qu'à montrer que les éléments de la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ sont deux à deux orthogonaux. Pour cela il suffit de montrer que si $(i,j)\in\mathbb{N}^2$ et si $i<j$ alors $\langle P_i,P_j\rangle=0$ ($i<j$ n'est pas restrictif car $\langle P_i,P_j\rangle=\langle P_j,P_i\rangle$).

Soit donc $(i,j)\in\mathbb{N}^2$ tel que $i<j$. Notons que $j\in\mathbb{N}^*$ et que $E_i\subset E_{j-1}$.

Par définition $P_j=A_j$ est orthogonal à $E_{j-1}$ donc à $E_i$ ainsi $\langle P_i,P_j\rangle=0$.

Ceci achève de montrer l'existence et l'unicité d'une suite $(P_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $E$ vérifiant i) et ii).

b) $\|1\|^2=\int_0^1 \frac{1\times 1}{\sqrt{1-t}}\,dt = I_0 = 2$. Ainsi $\underline{P_0=\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

Posons $P_1 = aX+b$ avec $a>0$.

$$0=\langle P_1,P_0\rangle=\int_0^1\frac{(at+b)\times\sqrt{2}}{\sqrt{1-t}}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2}}(aI_1+bI_0)\overset{I_1=\frac{2}{3}I_0}{=}\left(a\times\frac{2}{3}I_0+bI_0\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ \frac{2}{3}a+b\overset{I_0\neq 0}{=}0\ ;\ b=-\frac{2}{3}a.$$

$$1=\langle P_1,P_1\rangle=\langle P_1,aX+b\rangle=\langle P_1,aX+\sqrt{2}bP_0\rangle=a\langle P_1,X\rangle+\sqrt{2}b\langle P_1,P_0\rangle=a\langle P_1,X\rangle$$

$$1=a\int_0^1\frac{(at+b)\times t}{\sqrt{1-t}}\,dt=a\left[aI_2+bI_1\right]=a^2\times\frac{2\,[2^2 2!]^2}{5!}+ab\,2\frac{[2^1 1!]^2}{3!}=a^2\times\frac{16}{15}+\frac{4}{3}ab$$

$1=a^2\left[\frac{16}{15}+\frac{4}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\right]=a^2\times\frac{8}{45}$. Comme $a>0$ : $a=\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$ et donc $b=-\frac{2}{3}\times\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$.

Ainsi $\underline{P_1=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\left(\frac{3}{2}X-1\right)}$.

Q12 $n\in[\![1,+\infty[\![$, $\exists Q_n\in E$, $P_{n+1}=Q_nP_n+r_{P_n}(P_{n+1})$.

$\deg P_{n+1}=n+1$ et $\deg r_{P_n}(P_{n+1})<\deg P_n=n$ donc $\deg(Q_nP_n)=n+1$

Ainsi $\deg(Q_nP_n)=n+1$ et $\deg Q_n=1$.

$\exists(u_n,v_n)\in\mathbb{R}^2$, $Q_n=u_nX+v_n$. Notons que $u_n\neq 0$ car $\deg Q_n=1$.

$\underline{P_{n+1}=(u_nX+v_n)P_n+r_{P_n}(P_{n+1})}$.

b) Soit $k \in [\![0, n-2]\!]$. $\langle P_{n+1}, P_k \rangle = 0$.

$\langle (u_n X + v_n) P_n, P_k \rangle = u_n \langle X P_n, P_k \rangle + v_n \underbrace{\langle P_n, P_k \rangle}_{=0} = u_n \langle X P_n, P_k \rangle = u_n \langle P_n, X P_k \rangle$

or $X P_k \in E_{n-1}$ donc $u_n \langle P_n, X P_k \rangle = 0$.

Ainsi : $\langle P_{n+1}, P_k \rangle = \langle (u_n X + v_n) P_n, P_k \rangle = 0$

Donc $\langle r_{P_n}(P_{n+1}), P_k \rangle = \langle P_{n+1} - (u_n X + v_n) P_n, P_k \rangle = 0$.

$\forall k \in [\![0, n-2]\!]$, $\langle r_{P_n}(P_{n+1}), P_k \rangle = 0$

c) $(P_0, P_1, \dots, P_{n-1})$ est une famille orthonormale, donc libre, de $n$ éléments de $E_{n-1}$ qui est de dimension $n$ ; $(P_0, P_1, \dots, P_{n-1})$ est une base orthonormale de $E_{n-1}$.

Or $r_{P_n}(P_{n+1}) \in E_{n-1}$. $\exists (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, $r_{P_n}(P_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k$

mieux $r_{P_n}(P_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \langle P_k, r_{P_n}(P_{n+1}) \rangle P_k$ car $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base orthonormale. Ainsi, d'après b) : $r_{P_n}(P_{n+1}) = \langle P_{n-1}, r_{P_n}(P_{n+1}) \rangle P_{n-1}$

En posant $\omega_n = \langle P_{n-1}, r_{P_n}(P_{n+1}) \rangle$ on obtient :

$$P_{n+1} = (u_n X + v_n) P_n + \omega_n P_{n-1}.$$

# PARTIE III

Q13 a) $f \in F$. $f$ est une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ ; $\int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t}}\,dt$ est alors convergente d'après I Q1.

Ainsi $\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t}}\,dt$ existe pour tout $x \in [0,1]$ et ne peut exister pour $x \notin [0,1]$.

Donc $x \mapsto \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t}}\,dt$ a pour domaine de définition : $[0,1]$ : De plus $x \mapsto \sqrt{1-x}$ est défini sur $]-\infty,1]$.

$x \mapsto \sqrt{1-x}\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t}}\,dt$ est une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

$\forall x \in [0,1[$, $\varphi(f)(x) = \sqrt{1-x}\left[\int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t}}\,dt - \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t}}\,dt\right]$

$t \mapsto \frac{f(t)}{\sqrt{1-t}}$ est continue sur $[0,1[$ donc $x \mapsto \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t}}\,dt$ est dérivable sur $[0,1[$.

Comme $x \mapsto \sqrt{1-x}$ est dérivable sur $[0,1[$, $\varphi(f)$ est dérivable et donc continue sur $[0,1[$.

$\varphi(f)(1) = \sqrt{1-1}\int_1^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t}}\,dt = 0 = 0\times 0 = \lim_{x\to 1}\left(\sqrt{1-x}\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t}}\,dt\right)$ ; $\varphi(f)$ est continue en 1.

<u>$\varphi(f)$ est une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $[0,1[$ et continue sur $[0,1]$.</u>

b) • D'après a) $\forall f \in F$, $\varphi(f) \in F$.

• Soient $(f,g) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\forall x \in [0,1]$, $\varphi(\lambda f+g)(x) = \sqrt{1-x}\int_x^1 (\lambda f+g)(t)\,dt \overset{\text{toutes les intégrales cvg.}}{=} \lambda\sqrt{1-x}\int_x^1 f(t)\,dt + \sqrt{1-x}\int_x^1 g(t)\,dt$.

$\forall x \in [0,1]$, $\varphi(\lambda f+g)(x) = \lambda\,\varphi(f)(x) + \varphi(g)(x)$ ; $\varphi(\lambda f+g) = \lambda\,\varphi(f) + \varphi(g)$.

Ainsi <u>$\varphi$ est un endomorphisme de $F$.</u>

Soit $f \in \operatorname{Ker}(\varphi)$. $\forall x \in [0,1]$, $\sqrt{1-x}\int_x^1 f(t)\,dt = 0$

$\forall x \in [0,1[$, $\int_x^1 f(t)\,dt = 0$.

$\forall x \in [0,1[$, $\int_0^1 f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt = 0$ . En dérivant il vient .

$\forall x \in [0,1[$, $0 - f(x) = 0$. $\forall x \in [0,1[$, $f(x) = 0$ .

$h$ est continue en 1 donc $f(1) = \lim_{x \mapsto 1^-} f(x) = 0$. Finalement $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = 0$.

Donc $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0_F\}$ et <u>$\varphi$ est un endomorphisme injectif de F.</u>

<u>c)</u> $\forall f \in F$, $\varphi(f)(1) = 0$. Ainsi tout élément de $\mathrm{Im}\,\varphi$ s'annule en 1.

Posons $\forall t \in [0,1]$, $h(t) = t$. $h \in F$ et $h(1) = 1$. $h \in F$ et $h \notin \mathrm{Im}\,\varphi$

<u>$\varphi$ n'est pas surjectif.</u>

Q14 <u>a)</u> Soit $p \in \mathbb{N}$. Posons $h_p = \varphi((X-1)^p)$.

$\forall x \in [0,1]$, $h_p(x) = \sqrt{1-x} \int_x^1 \frac{(t-1)^p}{\sqrt{1-t}} dt = \sqrt{1-x}(-1)^p \int_x^1 (1-t)^{p-\frac{1}{2}} dt = \sqrt{1-x}(-1)^p \left[ -\frac{(1-t)^{p+\frac{1}{2}}}{p+\frac{1}{2}} \right]_x^1$

$\forall x \in [0,1]$, $h_p(x) = \frac{(-1)^p}{p+\frac{1}{2}} \sqrt{1-x}\,(1-x)^{p+\frac{1}{2}} = \frac{(-1)^p}{p+\frac{1}{2}} (1-x)^{p+1} = -\frac{1}{p+\frac{1}{2}} (x-1)^{p+1}$.

<u>$\forall p \in \mathbb{N}$, $\varphi((X-1)^p) = -\frac{2}{2p+1} (X-1)^{p+1}$.</u>

Soit $p \in \mathbb{N}$.

$\varphi\big(\mathrm{Vect}(1, X-1, \dots, (X-1)^p)\big) = \mathrm{Vect}(\varphi(1), \varphi(X-1), \dots, \varphi((X-1)^p))$

$= \mathrm{Vect}(-2(X-1), -\frac{2}{3}(X-1)^2, \dots, -\frac{2}{2p+1}(X-1)^{p+1}) = \mathrm{Vect}((X-1), (X-1)^2, \dots, (X-1)^{p+1})$.

Ainsi <u>$\forall p \in \mathbb{N}$, $\varphi(\mathrm{Vect}(1, X-1, \dots, (X-1)^p)) = \mathrm{Vect}(X-1, (X-1)^2, \dots, (X-1)^{p+1})$.</u>

Soit $P \in E$. $\exists p \in \mathbb{N}$, $P \in E_p$. Or $E_p = \mathrm{Vect}(1, (X-1), \dots, (X-1)^p)$ donc

$\varphi(P) \in \varphi(E_p) = \varphi(\mathrm{Vect}(1, X-1, \dots, (X-1)^p)) = \mathrm{Vect}(X-1, (X-1)^2, \dots, (X-1)^{p+1}) \subset E_{p+1} \subset E$.

$\forall P \in E$, $\varphi(P) \in E$. <u>E est stable par $\varphi$.</u>

Notons $H = \{Q \in E \mid X-1 \text{ divise } Q\} = \{Q \in E \mid Q(1) = 0\}$

$\forall P \in E$, $\varphi(P) \in E$ et $\varphi(P)(1) = 0$ donc $\forall P \in E$, $\varphi(P) \in H$. <u>$\mathrm{Im}\,\varphi \subset H$.</u>

Réciproquement soit $Q \in H$. $Q(1) = 0$ ; $(X-1)$ divise $Q$. $\exists S \in E$, $Q = (X-1) S$.

On peut alors trouver $s\in\mathbb{N}$ tel que $S\in E_s=\mathrm{Vect}(1,(X-1),\dots,(X-1)^s)$

Ainsi $Q=(X-1)S\in\mathrm{Vect}(X-1,(X-1)^2,\dots,(X-1)^{s+1})=\phi(\mathrm{Vect}(1,X-1,\dots,(X-1)^s))\subset\mathrm{Im}\,\phi$.

Donc $\forall Q\in H$, $Q\in\mathrm{Im}\,\phi$

Finalement : $\underline{\mathrm{Im}\,\phi=H=\{Q\in E \mid X-1 \text{ divise } Q\}}$.

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\forall p\in\mathbb{N}$, $\phi(E_p)=\phi(\mathrm{Vect}(1,X-1,\dots,(X-1)^p))=\mathrm{Vect}(X-1,(X-1)^2,\dots,(X-1)^{p+1})$

Une récurrence simple permet de dire que : $\forall p\in\mathbb{N}$, $\phi^n(E_p)=\mathrm{Vect}((X-1)^n,(X-1)^{n+1},\dots,(X-1)^{p+n})$

Soit donc $P\in E$. $\exists p\in\mathbb{N}$, $P\in E_p$. $\phi^n(P)\in\phi^n(E_p)=\mathrm{Vect}((X-1)^n,(X-1)^{n+1},\dots,(X-1)^{p+n})$ donc $\phi^n(P)$ est divisible par $(X-1)^n$.

Réciproquement soit $Q$ un élément de $E$ divisible par $(X-1)^n$.

$\exists S\in E$, $Q=(X-1)^nS$ ; $\exists s\in\mathbb{N}$, $S\in E_s=\mathrm{Vect}(1,(X-1),\dots,(X-1)^s)$.

Ainsi $Q=(X-1)^nS\in\mathrm{Vect}((X-1)^n,(X-1)^{n+1},\dots,(X-1)^{n+s})=\phi^n(\mathrm{Vect}(1,X-1,\dots,(X-1)^s))=\phi^n(E_s)$.

Donc $\exists P\in E_s$, $\phi^n(P)=Q$ ; $Q\in\mathrm{Im}\,\phi^n$.

Ce qui précède permet de dire que : $\underline{\mathrm{Im}\,\phi^n=\{Q\in E\mid (X-1)^n \text{ divise } Q\}}$

<u>Remarque</u> : le résultat vaut encore pour $n=0$ car $\phi^0=\mathrm{Id}_E$ et $\{Q\in E\mid (X-1)^0 \text{ divise } Q\}=E$.

Q15 a) $P\in\phi(E)$ donc $\exists\hat{P}\in E$, $\phi(\hat{P})=P$. L'injectivité de $\phi$ montre alors l'unicité de $\hat{P}$.

$\underline{\forall P\in\phi(E),\ \exists!\,\hat{P}\in E,\ \phi(\hat{P})=P.}$

b) $\forall x\in[0,1[$, $P(x)=\sqrt{1-x}\displaystyle\int_x^1\frac{\hat{P}(t)}{\sqrt{1-t}}dt$, $\forall x\in[0,1[$, $\displaystyle\int_x^1\frac{\hat{P}(t)}{\sqrt{1-t}}dt=\frac{P(x)}{\sqrt{1-x}}=g(x)$.

$\forall x\in[0,1[$, $\displaystyle\int_0^1\frac{\hat{P}(t)}{\sqrt{1-t}}dt-\int_0^x\frac{\hat{P}(t)}{\sqrt{1-t}}dt=g(x)$. En dérivant on obtient : $0-\dfrac{\hat{P}(x)}{\sqrt{1-x}}=g'(x)$.

$\underline{\forall x\in[0,1[,\quad \hat{P}(x)=-\sqrt{1-x}\,g'(x)}$

c) $P=(X-1)S$ avec $S\in E$.

$$\forall x\in[0,1[,\ \hat{P}(x)=-\sqrt{1-x}\Bigg[\underbrace{\frac{P'(x)\sqrt{1-x}-P(x)\left(-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)}{1-x}}_{g'(x)}\Bigg]=-P'(x)-\frac{P(x)}{2(1-x)}=-P'(x)+\frac{1}{2}S(x)$$

ceci permet d'écrire : $\hat{P} = -P' + \frac{1}{2} S$ ($\hat{P} - (-P' + \frac{1}{2} S)$ admet une infinité de zéros).

• soit $\lambda$ un zéro de $P$ d'ordre $k$ distinct de 1. $P = \underbrace{(X-1)(X-\lambda)^k \varphi}_{S}$ avec $\varphi \in E$ et $\varphi(\lambda) \neq 0$.

$\hat{P} = -k(X-\lambda)^{k-1}(X-1)\varphi - (X-\lambda)^k[\varphi + (X-1)\varphi'] + \frac{1}{2}(X-\lambda)^k \varphi$

$\hat{P} = (X-\lambda)^{k-1}[-k(X-1)\varphi - (X-\lambda)(\varphi + (X-1)\varphi') + \frac{1}{2}(X-\lambda)\varphi]$

$\hat{P} = (X-\lambda)^{k-1} V$ avec $V = -k(X-1)\varphi - (X-\lambda)(\varphi + (X-1)\varphi') + \frac{1}{2}(X-\lambda)\varphi$

$\hat{P} = (X-\lambda)^{k-1} V$ avec $V(\lambda) = -k(\lambda-1)\varphi(\lambda) \neq 0$ ; $\lambda$ est un zéro d'ordre $k-1$ de $\hat{P}$.

• supposons que 1 soit un zéro d'ordre $k$ de $P$. $P = (X-1)^k \varphi$ avec $\varphi(1) \neq 0$.

$\hat{P} = -k(X-1)^{k-1}\varphi - (X-1)^k \varphi' + \frac{1}{2}(X-1)^{k-1}\varphi = (X-1)^{k-1}[-k\varphi - (X-1)\varphi' + \frac{1}{2}\varphi]$

$\hat{P} = (X-1)^{k-1} V$ avec $V = -k\varphi - (X-1)\varphi' + \frac{1}{2}\varphi$

$\hat{P} = (X-1)^{k-1} V$ avec $V(1) = (\frac{1}{2} - k)\varphi(1) \neq 0$ ; 1 est zéro d'ordre $k-1$ de $\hat{P}$.

<u>Si $\lambda$ est un zéro de $P$ d'ordre $k$, $\lambda$ est un zéro d'ordre $k-1$ de $\hat{P}$.</u>

Q16 a) $\phi$ est injectif donc $\phi^n$ aussi.

Comme $P \in \phi^n(E)$, $\exists R_n \in E$, $\phi^n(R_n) = P$. L'injectivité de $\phi^n$ donne alors l'unicité de $R_n$. <u>$\exists! R_n \in E$, $\phi^n(R_n) = P$.</u>

b) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. $P \in \phi^n(E) \subset \phi^k(E)$. $\exists! R_k \in E$, $\phi^k(R_k) = P$.

$\phi^k(R_k) = P = \phi^{k+1}(R_{k+1}) = \phi^k(\phi(R_{k+1}))$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ ; par injectivité il vient : $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\phi(R_{k+1}) = R_k$. Posons $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\forall x \in [0,1[$, $g_k(x) = \frac{R_k(x)}{\sqrt{1-x}}$

d'après Q15 : $\forall x \in [0,1[$, $R_{k+1}(x) = -\sqrt{1-x}\, g_k'(x)$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$

Ainsi $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\forall x \in [0,1[$, $\sqrt{1-x}\, g_{k+1}(x) = -\sqrt{1-x}\, g_k'(x)$

$\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $g_{k+1} = -g_k'$. Une induction simple donne : $g_n = (-1)^{n-1} g_1^{(n-1)}$

Observons que $\phi(R_1) = P$ donc $\forall x \in [0,1[$, $R_1(x) = -\sqrt{1-x}\, g'(x) = \sqrt{1-x}\, g_1(x)$.

Ainsi

Ainsi $\forall x \in [0,1[$, $g'(x) = -g_1(x)$ ; $\forall x \in [0,1[$, $g_1(x) = -g'(x)$.

Alors $\forall x \in [0,1[$, $R_n(x) = \sqrt{1-x}\, q_n(x) = \sqrt{1-x}\,(-1)^{n-1} g_1^{(n-1)}(x) = (-1)^{n-1}(-g^{(n)}(x)) \times \sqrt{1-x}$

Finalement : $\underline{\forall x \in [0,1[,\ R_n(x) = (-1)^n \sqrt{1-x}\ g^{(n)}(x).}$

(Q17) a) Soit $(P, \varphi) \in E^2$. Soit $x \in [0,1[$.

$$\int_0^x \frac{P(t)\varphi(t)}{\sqrt{1-t}}\,dt = \int_0^x \frac{P(t)}{\sqrt{1-t}}\,\varphi(t)\,dt.$$

Posons $\forall t \in [0,1]$, $u(t) = -\int_t^1 \frac{P(z)}{\sqrt{1-z}}\,dz = \int_0^t \frac{P(z)}{\sqrt{1-z}}\,dz - \int_0^1 \frac{P(z)}{\sqrt{1-z}}\,dz$

$u$ est continue et dérivable sur $[0,1[$ et $\forall t \in [0,1[$, $u'(t) = \frac{P(t)}{\sqrt{1-t}}$.

Notons aussi que $u$ est continue en $1$ car $u(1) = 0 = \lim_{t\to 1}\left(\int_0^t \frac{P(z)}{\sqrt{1-z}}\,dz - \int_0^1 \frac{P(z)}{\sqrt{1-z}}\,dz\right)$

Reprenons alors le calcul précédent.

$$\int_0^x \frac{P(t)\varphi(t)}{\sqrt{1-t}}\,dt = \int_0^x u'(t)\varphi(t)\,dt = [u(t)\varphi(t)]_0^x - \int_0^x u(t)\varphi'(t)\,dt = u(x)\varphi(x) - u(0)\varphi(0) - \int_0^x u(t)\varphi'(t)\,dt$$

$$\int_0^x \frac{P(t)\varphi(t)}{\sqrt{1-t}}\,dt = u(x)\varphi(x) - u(0)\varphi(0) - \int_0^x u(t)\varphi'(t)\,dt$$

En faisant tendre $x$ vers $1$ il vient : $\langle P, \varphi\rangle = u(1)\varphi(1) - u(0)\varphi(0) - \int_0^1 u(t)\varphi'(t)\,dt$

Ou : $\langle P, \varphi\rangle = -u(0)\varphi(0) - \int_0^1 u(t)\varphi'(t)\,dt$.

Notons alors que : $\forall t \in [0,1]$, $\phi(P)(t) = \sqrt{1-t}\int_t^1 \frac{P(z)}{\sqrt{1-z}}\,dz = -\sqrt{1-t}\,u(t)$.

Donc $\langle P, \varphi\rangle = -u(0)\varphi(0) + \int_0^1 \frac{\phi(P)(t)}{\sqrt{1-t}}\varphi'(t)\,dt = -\left(-\int_0^1 \frac{P(z)}{\sqrt{1-z}}\,dz\right)\varphi(0) + \langle \phi(P), \varphi'\rangle$.

Ce qui s'écrit encore $\underline{\langle P, \varphi\rangle = \varphi(0)\langle 1, P\rangle + \langle \varphi', \phi(P)\rangle}$.

b) $n \in \mathbb{N}$ et $P \in E$.

$P \in E_{n+1}^{\perp} \Leftrightarrow \forall i \in [\![0, n+1]\!],\ \langle P, X^{i+1}\rangle = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \in [\![1, n+1]\!],\ 0^i\langle 1, P\rangle + \langle iX^{i-1}, \phi(P)\rangle = 0 \\ 1 \times \langle 1, P\rangle + \langle 0, \phi(P)\rangle = 0 \end{cases}$

$P \in E_{n+1}^{\perp} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \in [\![1, n+1]\!],\ \langle X^{i-1}, \phi(P)\rangle = 0 \\ \langle 1, P\rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in [\![0, n]\!],\ \langle X^k, \phi(P)\rangle = 0 \\ \langle 1, P\rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle 1, P\rangle = 0 \\ + \\ \phi(P) \in E_n^{\perp} \end{cases}$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall P \in E, \; P \in E_{n+1}^{\perp} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle 1, P\rangle = 0 \\ \text{et} \\ \phi(P) \in E_n^{\perp} \end{cases}$

c) Soit $P$ un élément de $\phi(E)$. $P = (X-1)S$ avec $S \in E$.

Posons $\forall x \in [0,1[, \; g(x) = \dfrac{P(x)}{\sqrt{1-x}}$ ; $\forall x \in [0,1[, \; \hat{P}(x) = -\sqrt{1-x}\, g'(x)$.

$\forall y \in [0,1[, \; \displaystyle\int_0^y \frac{\hat{P}(t)}{\sqrt{1-t}}\,dt = -\int_0^y g'(t)\,dt = g(0) - g(y) = P(0) - \frac{P(y)}{\sqrt{1-y}} = P(0) - \frac{(y-1)S(y)}{\sqrt{1-y}}$.

$\forall y \in [0,1[, \; \displaystyle\int_0^y \frac{\hat{P}(t)}{\sqrt{1-t}}\,dt = P(0) + \sqrt{1-y}\; S(y)$.

En faisant tendre $y$ vers 1 il vient : $\underline{\langle 1, \hat{P}\rangle = P(0)}$.

Q18 a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = X^n(1-X)^n = (-1)^n X^n (X-1)^n$ ; $A^n$ est divisible par $(X-1)^n$ ; $A^n \in \phi^n(E)$.

Ainsi $\underline{\exists !\, H_n \in E, \; \phi^n(H_n) = A^n}$. et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

Lemme.. $\forall P \in E - \{0_E\}$, $\deg P = p \Rightarrow \deg \phi(P) = p+1$.

Soit $P \in E - \{0_E\}$. Posons $p = \deg P$. $\exists (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ ; $P = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k (X-1)^k$ et $\alpha_p \neq 0$

$\phi(P) = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k \; \phi((X-1)^k) = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k \left(-\frac{2}{2k+1}\right)(X-1)^{k+1}$ ; ainsi $\deg \phi(P) = p+1$ car

$\alpha_p \left(-\frac{2}{2p+1}\right) \neq 0$. Ceci achève la démonstration du lemme.

$\phi^n(H_n) = A^n$. Nécessairement $H_n$ n'est pas nul. Posons $r_n = \deg H_n$.

Une légère induction prouve que : $\deg \phi^n(H_n) = r_n + n$

Comme $\deg A^n = 2n$ : $\underline{\deg H_n = n}$.

c) Remarque.. Soit $P \in \phi(E)$. D'après Q17 :

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\hat{P} \in E_{k+1}^{\perp} \Leftrightarrow \langle 1, \hat{P}\rangle = 0$ et $\phi(\hat{P}) \in E_k^{\perp} \Leftrightarrow P(0) = 0$ et $P \in E_k^{\perp}$

$n \in \mathbb{N}^*$.

Notons, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $U_k$ l'unique élément de $E$ tel que $\phi^k(U_k) = A^n$.

$\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $U_{k+1} = \hat{U}_k$ , $U_n = H_n$ et $U_0 = A^n$.

$0$ est zéro d'ordre $n$ de $A^n$ donc d'ordre $n-1$ de $U_1 = \widehat{U}_0$ ;

$0$ est zéro d'ordre $n-1$ de $U_1$ donc d'ordre $n-2$ de $U_2 = \widehat{U}_1$ ;

Par récurrence pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $0$ est zéro d'ordre $n-k$ de $U_k$.

$H_n \in E_{n-1}^{\perp} \Leftrightarrow U_n \in E_{n-1}^{\perp} \Leftrightarrow \widehat{U}_{n-1} \in E_{n-1}^{\perp} \Leftrightarrow U_{n-1}(0) = 0$ et $U_{n-1} \in E_{n-2}^{\perp} \Leftrightarrow U_{n-1} \in E_{n-2}^{\perp}$

$H_n \in E_{n-1}^{\perp} \Leftrightarrow U_{n-1} \in E_{n-2}^{\perp} \Leftrightarrow \widehat{U}_{n-2} \in E_{n-2}^{\perp} \Leftrightarrow U_{n-2}(0) = 0$ et $U_{n-2} \in E_{n-3}^{\perp} \Leftrightarrow U_{n-2} \in E_{n-3}^{\perp}$

Par récurrence on obtient : $H_n \in E_{n-1}^{\perp} \Leftrightarrow U_{n-k} \in E_{n-k-1}^{\perp}$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Ainsi $H_n \in E_{n-1}^{\perp} \Leftrightarrow U_1 \in E_0^{\perp} \Leftrightarrow \langle U_1, 1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \widehat{U}_0, 1 \rangle = 0 \Leftrightarrow U_0(0) = 0$

donc $H_n \in E_{n-1}^{\perp} \Leftrightarrow A(0) = 0$.

Comme $A(0) = 0$ : $\underline{\underline{H_n \in E_{n-1}^{\perp}.}}$

d) Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \neq q$.

si $p < q$ : $H_p \in E_p \subset E_{q-1}$ et $H_q \in E_{q-1}^{\perp}$ donc $\langle H_p, H_q \rangle = 0$

si $p > q$ : $H_q \in E_q \subset E_{p-1}$ et $H_p \in E_{p-1}^{\perp}$ donc $\langle H_p, H_q \rangle = 0$.

$\underline{\underline{\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad p \neq q \Rightarrow \langle H_p, H_q \rangle = 0.}}$

Q19 * $H_0 \in E_0$ et $P_0 \in E_0 - \{0_E\}$. $\exists \alpha_0 \in \mathbb{R}$, $H_0 = \alpha_0 P_0 = \alpha_0 \frac{1}{\sqrt{2}}$

Or $A^0 = 1 = \varphi^0(H_0) = H_0$, $H_0 = 1$ ; $\alpha_0 = \sqrt{2}$.

$\exists \alpha_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $H_0 = \alpha_0 P_0$ $(\alpha_0 = \sqrt{2})$.

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $H_n \in E_n \cap E_{n-1}^{\perp} = D_n = \mathrm{Vect}(P_n)$.

$\exists \alpha_n \in \mathbb{R}$, $H_n = \alpha_n P_n$

Reste à prouver que : $\alpha_n \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $\deg H_n = \deg P_n = n$ et que le coefficient de $X^n$ dans $P_n$ est positif il suffit de prouver que le coefficient de $X^n$ dans $H_n$ est positif. Reprenons le lemme de Q18 b) et sa démonstration. Observons alors que si $P$ est un élément non nul de $E$ de degré $p$ dont le coefficient de $X^p$ est $\alpha_p$ alors $\varphi(P)$ est un élément de $E$ de degré $p+1$ dont le coefficient de $X^{p+1}$ est $-\frac{2\alpha_p}{2p+1}$ ; notons que $\alpha_p$ et $-\frac{2\alpha_p}{2p+1}$ sont de signes opposés.

Par une récurrence simple on montre alors que si $a_n$ est le coefficient de $X^n$ dans $H_n$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi^k(H_n)$ est de degré $n+k$ et le coefficient de $X^{n+k}$ dans $\varphi^k(H_n)$ a même signe que $(-1)^k a_n$.

En particulier le coefficient de $X^{2n}$ dans $A^n = \varphi^n(H_n)$ a même signe que $(-1)^n a_n$.

Or $A^n = X^n(1-X)^n$ donc le coefficient de $X^{2n}$ dans $A^n$ est $(-1)^n$.

Ainsi $a_n \geqslant 0$ ; mieux $a_n > 0$.

Ceci achève de prouver que $\alpha_n > 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists \alpha_n \in \mathbb{R}_+^*, \quad H_n = \alpha_n P_n.$

Remarque.. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n \neq 0$ ; ceci assure l'unicité de $\alpha_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$...

Q20 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $a_n$ le coefficient de $X^n$ dans $H_n$.

Notons que $H_n = a_n X^n + Q_n$ avec $Q_n \in E_{n-1}$

Ainsi $\langle H_n, H_n \rangle = a_n \langle H_n, X^n \rangle + \langle H_n, Q_n \rangle = a_n \langle H_n, X^n \rangle$ car $H_n \in E_{n-1}^{\perp}$.

$\|H_n\|^2 = a_n \langle H_n, X^n \rangle$. Calculons $\langle H_n, X^n \rangle$.

$$\langle H_n, X^n \rangle \underset{\text{Q17 a)}}{=} 0^n \langle 1, H_n \rangle + \langle n X^{n-1}, \varphi(H_n) \rangle = n \langle \varphi(H_n), X^{n-1} \rangle$$

$$\langle H_n, X^n \rangle = n \left[ 0^{n-1} \langle 1, \varphi(H_n) \rangle + \langle (n-1) X^{n-2}, \varphi^2(H_n) \rangle \right] = n(n-1) \langle X^{n-2}, \varphi^2(H_n) \rangle$$

Une légère induction donne alors :

$$\langle H_n, X^n \rangle = (n)(n-1) \cdots 1 \langle X^0, \varphi^n(H_n) \rangle = n! \langle 1, A^n \rangle.$$

Calculons $a_n$. Le coefficient de $X^n$ dans $H_n$ est $a_n$.

Le coefficient de $X^{n+1}$ dans $\varphi(H_n)$ est : $-\frac{2}{2n+1} a_n$

Le coefficient de $X^{n+2}$ dans $\varphi^2(H_n)$ est : $\left(-\frac{2}{2n+3}\right)\left(-\frac{2}{2n+1}\right) a_n$

En itérant il vient que le coefficient de $X^{2n} = X^{n+n}$ dans $\varphi^n(H_n)$ est :

$$a_n \prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{2}{2(n+k)+1}\right) = a_n (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k+\frac{1}{2}}. \quad \text{Or} \quad \varphi^n(H_n) = A^n = (X(1-X))^n$$

Ainsi $a_n (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k+\frac{1}{2}} = (-1)^n$ ; $\quad a_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(n+k+\frac{1}{2}\right)$. $\quad \|H_n\|^2 = n! \prod_{k=0}^{n-1} \left(n+k+\frac{1}{2}\right) \langle 1, A^n \rangle.$