SUJET 8

Dans toute la suite $E = \mathbb{R}[X]$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

PARTIE I

Q1 Montrer que pour toute application continue f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Q2 On pose pour tout élément n de $\mathbb{N}$: $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ converge (on pourra étudier sa monotonie).

Q3 Montrer que pour n dans $\mathbb{N}^*$:

$$(2n+1)\,I_n = (2n)\,I_{n-1}$$

(on pourra faire une intégration par parties... $u(t) = t^n$...)

Etudier la nature de la série de terme général $v_n = \ln I_n - \ln I_{n-1}$ et en déduire que la limite de la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est 0.

Q4 Pour tout élément n de $\mathbb{N}$, on pose : $J_n = \sqrt{n}\ I_n$ et $K_n = \sqrt{n+1}\ I_n$. Montrer que les suites $(J_n)_{n\geqslant 0}$ et $(K_n)_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes. En déduire qu'il existe un réel strictement positif α tel que : $I_n \sim \dfrac{\alpha}{\sqrt{n}}$

Q5 Pour n dans $\mathbb{N}$ exprimer I_n à l'aide de factorielles (le texte permet de vérifier le résultat... j'exige ici une récurrence).

Calculer α en utilisant la formule de Stirling ($n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$). Le monde à l'envers non ? Commenter cette dernière assertion en deux lignes pleines d'humour (ou en un mot... de trois lettres).

Q6 Pour p et q dans $\mathbb{N}$ on pose $u_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^p(1-t)^q}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$.

Calculer $u_{0,r}$ pour r dans $\mathbb{N}$ (question qui n'est pas dans la correction).

Exprimer $u_{p,q}$ en fonction de $u_{p-1,q+1}$ pour p dans $\mathbb{N}^*$ et q dans $\mathbb{N}$ ($u_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^{q-1/2}\,\mathrm{d}t$).

En déduire que si p et q sont dans $\mathbb{N}$: $u_{p,q} = \dfrac{2^{2p+1}p!\ (p+q)!\ (2q)!}{q!\ (2p+2q+1)!}$

(prendre son temps ; je n'exige pas de récurrence mais je veux une justification assez explicite).

PARTIE II

Q7 On pose pour tout couple (P,Q) d'éléments de $E=\mathbb{R}[X]: <P,Q>=\displaystyle\int_0^1 \frac{P(t)\,Q(t)}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire $<.,.>$ sur E. On note $\|.\|$ la norme associée.

Q8 Montrer que pour tout élément A de E l'application φ_A qui à tout élément P de E associe AP est un endomorphisme symétrique de E.

Q9 Soit A un élément non nul de E. a est le degré de A. On note r_A l'application qui à un élément P de E associe le reste dans la division de P par A.

-a) Rappeler le théorème de la division euclidienne. Préciser l'image par r_A d'un élément P de E dont le degré est strictement inférieur à celui de A (cette question n'est pas dans la correction).

a) Montrer que r_A est un endomorphisme de E. Montrer que r_A est une projection de E. Caractériser les éléments de $\operatorname{Ker} r_A$. Montrer que si a n'est pas nul : $\operatorname{Im} r_A=\mathbb{R}_{a-1}[X]$; et si $a=0$?

b) Montrer (en raisonnant par l'absurde) que si le degré de A n'est pas nul, r_A n'est pas une projection orthogonale (établir et exploiter l'égalité : $<1,A^2>=<A,A>$).

Q10 n appartient à $\mathbb{N}$ et A est un élément non nul de E_n. Soit a son degré. On note r'_A la restriction de r_A à E_n.

a) Montrer que r'_A peut être considérée comme un projection de E_n. Montrer que r'_A est la projection sur $\operatorname{Vect}(1,X,\dots,X^{a-1})$ parallèlement à $\operatorname{Vect}(A,AX,\dots,AX^{n-a})$.

b) Montrer que si $0<a<n$ cette projection n'est pas orthogonale (raisonner par l'absurde et montrer que $<A,A>=0$ en passant par $<X^k,AX^i>=0$ pour ...).

c) Ici $a=n>0$. Repréciser le noyau et l'image de r'_A. En déduire que r'_A est une projection orthogonale si et seulement si A appartient à l'orthogonal D_n de E_{n-1} dans E_n. Préciser la dimension de D_n.

Montrer alors qu'il existe un unique polynôme A_n de degré n, de norme 1, dont le coefficient du terme de plus haut degré est positif et tel que r'_{A_n} soit une projection orthogonale de E_n.

Q11 a) En déduire l'existence et l'unicité d'une suite $(P_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de E vérifiant

i) $(P_n)_{n\geqslant 0}$ est une famille orthonormale d'éléments de E.
ii) Pour tout élément n de $\mathbb{N}$, P_n est de degré n et le coefficient de X^n dans P_n est positif.

b) Calculer P_0 et P_1.

Q12 n est un élément de $[\![2,+\infty[\![$.

a) Montrer qu'il existe deux réels u_n et v_n tels que : $P_{n+1}=(u_nX+v_n)P_n+r_{P_n}(P_{n+1})$.

b) Démontrer que si k appartient à $[\![0,n-2]\!]$ alors $<r_{P_n}(P_{n+1}),P_k>=0$ $(<AX,B>=<A,XB>)$.

c) En remarquant que $(P_0,P_1,\dots,P_{n-1})$ est une base orthonormale de E_{n-1}, montrer qu'il existe un réel w_n tel que :

$$P_{n+1}=(u_nX+v_n)P_n+w_nP_{n-1}$$

PARTIE III

F est ici l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Nous considérerons que E est un sous-espace de F (!).

Q13 On note Φ l'application qui à tout élément f de F associe $x \to \sqrt{1-x}\displaystyle\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$.

a) Soit f un élément de F. Montrer que $\Phi(f)$ est une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $[0,1[$ et continue sur $[0,1]$.

b) Montrer que Φ est un endomorphisme injectif de F.

c) Soit f un élément de F ; calculer $\Phi(f)(1)$. Φ est-il Surjectif ?

Q14 On rappelle que $E = \mathbb{R}[X]$ et que l'on confond E avec l'ensemble des applications polynômiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$... ou de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

a) Calculer $h_p = \Phi\Big((X-1)^p\Big)$ pour tout élément p de $\mathbb{N}$.

En déduire que $\Phi\Big(\text{Vect}\big(1, X-1, (X-1)^2, \ldots, (X-1)^p\big)\Big) = \text{Vect}\big(X-1, (X-1)^2, \ldots, (X-1)^{p+1}\big)$ pour tout élément p de $\mathbb{N}$.

Déduire très proprement de ce qui précède que E est stable par Φ et que $\Phi(E)$ est l'ensemble des éléments de E divisible par $X-1$.

b) n est dans $\mathbb{N}^*$. S'inspirer de ce qui précède pour caractériser les éléments de $\Phi^n(E)$ ($\Phi^n = \Phi \circ \Phi \circ \cdots \circ \Phi$). Valider le résultat obtenu pour $n = 0$.

Q15 Soit P un élément de $\Phi(E)$.

a) Montrer qu'il existe un unique élément $\widehat{P}$ de E tel que $\Phi(\widehat{P}) = P$.

b) On pose pour tout x dans $[0,1[: g(x) = \dfrac{P(x)}{\sqrt{1-x}}$. Montrer que $\forall x \in [0,1[,\ \widehat{P}(x) = -\sqrt{1-x}\ g'(x)$.

c) Montrer que si λ est une racine de P d'ordre k, λ est une racine de $\widehat{P}$ d'ordre $k-1$.

Q16 n est élément de $\mathbb{N}^*$ et P appartient à $\Phi^n(E)$.

a) Montrer qu'il existe un unique élément R_n de E tel que $\Phi^n(R_n) = P$.

b) Donner une expression simple de $R_n(x)$ en fonction de la dérivée $n^{\text{ème}}$ de g, pour tout élément x de $[0,1[$.

Q17 a) Montrer que si P et Q sont deux éléments de E :

$$< P, Q >= Q(0) < 1, P > + < Q', \Phi(P) >$$

b) En déduire que si n est dans $\mathbb{N}$ et P dans E :

$$P \in (E_{n+1})^{\perp} \Longleftrightarrow < 1, P >= 0 \text{ et } \Phi(P) \in (E_n)^{\perp}$$

c) Exprimer, pour P dans $\Phi(E)$, $< 1, \widehat{P} >$ en fonction de $P(0)$.

Q18 On pose $A = X(1-X)$.

a) Montrer que pour tout élément n de $\mathbb{N}$ il existe un unique élément H_n de E tel que : $\Phi^n(H_n) = A^n$.

b) Préciser le degré de H_n pour tout n dans $\mathbb{N}$.

c) n appartient à $\mathbb{N}^*$; H_n appartient-il à $(E_{n-1})^\perp$?

d) Soit p et q deux éléments distincts de $\mathbb{N}$. Montrer que $< H_p, H_q >= 0$.

Q19 Montrer qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ de réels positifs telle que : $H_n = \alpha_n P_n$ pour tout élément n de $\mathbb{N}$.

Q20 a) Montrer que pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$:

$$\|H_n\|^2 = n! \prod_{k=0}^{n-1}(n+k+\frac{1}{2}) \ < 1, A^n >$$

b) En utilisant $IQ6$, montrer que pour tout élément n de $\mathbb{N}$:

$$\alpha_n = \frac{n!}{\sqrt{2n+\frac{1}{2}}}$$

c) Quel est, pour tout n élément de $\mathbb{N}$, le terme de plus haut degré de P_n ? En déduire la valeur du coefficient u_n de Q12.