

## CCP 2012. Option MP. Mathématiques 2.

*Corrigé pour serveur UPS par JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)*

### Exercice

- D'après le théorème de Fermat (puisque 11 est premier et que 11 ne divise pas 3) on a  $3^{10} \equiv 1$  modulo 11.  
Si  $10 = pq + r$  est la division euclidienne de 10 par  $p$  on a  $3^{10} \equiv 3^r$  donc  $3^r \equiv 1$  avec  $0 \leq r < p$  donc  $r = 0$  par définition de  $p$ . Ainsi  $p$  divise 10 donc  $p = 1, 2, 5$  ou 10.  
Or  $3^2 \equiv -2$  donc  $3^4 \equiv 4$  et  $3^5 \equiv 3 \times 4 = 12 \equiv 1$ . Ainsi  $p = 5$   $\square$
- $2012 = 10 \times 201 + 2$  donc  $3^{2012} = (3^{10})^{201} \times 3^2 \equiv 9$  et ainsi  $3^{n+2012} \equiv 9 \times 3^n$   
Par ailleurs  $5^{2n} = 25^n \equiv 3^n$  donc  $9 \times 5^{2n} \equiv 9 \times 3^n$   $\square$

### Problème

#### Partie I : Étude du cas $n = 2$ .

- $\varphi_A(\lambda M + N) = \lambda \varphi_A(M) + \varphi_A(N)$  clairement et non moins clairement  $I_2$  et  $A$  appartiennent à  $\text{Ker } \varphi_A$ .  $\square$
- Il vient  $\varphi_A(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\varphi_A(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\varphi_A(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix}$ ,  $\varphi_A(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d-a & -b \end{pmatrix}$ .

Donc la matrice de  $\varphi_A$  dans la base  $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$  est  $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c & b \\ 0 & 0 & c & -b \\ -b & b & a-d & 0 \\ c & -c & 0 & d-a \end{pmatrix}$   $\square$

Remarque : Il en découle bien comme annoncé dans l'énoncé que  $\varphi_A$  est l'endomorphisme nul si et seulement si  $b = c = 0$  et  $a = d$  soit si et seulement si  $A = \lambda I_2$ .

- En remplaçant la première colonne  $C_1$  de  $\text{Det}(XI_4 - U)$  par  $C_1 + C_2$  on factorise  $X$  dans la première colonne. Puis en remplaçant la seconde ligne  $L_2$  par  $L_2 - L_1$  et en développant par rapport à la première colonne dont seul le premier terme est non nul il vient :

$$\chi_{\varphi_A}(X) = X \begin{vmatrix} X & -2c & 2b \\ -b & X - (a-d) & 0 \\ c & 0 & X + (a-d) \end{vmatrix} = X \Delta(X). \text{ En développant par la règle de Sarrus il vient :}$$

$$\Delta(X) = X(X^2 - (a-d)^2) - 2bc(X - (a-d)) - 2bc(X + (a-d)) = X(X^2 - (a-d)^2) - 4bcX.$$

$$\text{Ainsi } \chi_{\varphi_A}(X) = X^2(X^2 - ((a-d)^2 + 4bc)) \quad \square$$

- Si  $(a-d)^2 + 4bc < 0$  alors  $\varphi_A$  admet 2 valeurs propres non réelles donc n'est pas  $\mathbb{R}$ -diagonalisable.  
Si  $(a-d)^2 + 4bc = 0$  alors  $\chi_{\varphi_A}(X) = X^4$  donc  $\varphi_A$  est diagonalisable si et seulement si  $\varphi_A = 0$  ce qui n'est pas par hypothèse.  
Si  $(a-d)^2 + 4bc > 0$  alors  $\varphi_A$  admet deux valeurs propres réelles non nulles de multiplicité 1 et 0 comme valeur propre double. Donc  $\dim \text{Ker } \varphi_A \leq 2$  et  $\varphi_A$  est diagonalisable si et seulement si  $\text{Ker } \varphi_A$  est de dimension 2. Or  $I_2$  et  $A$  appartiennent à  $\text{Ker } \varphi_A$  et sont linéairement indépendantes par hypothèse. Donc  $\dim \text{Ker } \varphi_A \geq 2$  et donc  $\dim \text{Ker } \varphi_A = 2$  et ainsi  $\varphi_A$  est bien diagonalisable.

En conclusion si  $A \neq \lambda I_2$  alors  $\varphi_A$  est diagonalisable si et seulement si  $(d-a)^2 + 4bc > 0$ .  $\square$

- $\chi_A(X) = X - (a+d)X + ad - bc$  dont le discriminant a pour valeur  $(d-a)^2 + 4bc$ .  
Si  $(d-a)^2 + 4bc < 0$  pas de valeurs propres réelles donc  $A$  n'est pas  $\mathbb{R}$ -diagonalisable.  
Si  $(d-a)^2 + 4bc = 0$  alors  $A$  admet une seule valeur propre  $\lambda$  d'ordre 2 donc n'est pas diagonalisable. En effet si elle l'était elle serait semblable à  $\lambda I_2$  donc égale  $\lambda I_2$  ce qui n'est pas par hypothèse.  
Si  $(d-a)^2 + 4bc > 0$  alors  $A$  admet deux valeurs propres réelles distinctes donc est diagonalisable.

Ainsi  $\varphi_A$  est diagonalisable si et seulement si  $A$  l'est.  $\square$

#### Partie II : Étude du cas général.

- a) Si  $M$  est une matrice quelconque,  $ME_{i,j}$  est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles sauf la colonne  $j$  qui est constituée de la colonne  $i$  de  $M$  de sorte que  $DE_{i,j} = \lambda_i E_{i,j}$ .  
De même  $E_{i,j}M$  est la matrice dont toutes les lignes sont nulles sauf la ligne  $i$  qui est constituée de la ligne  $j$  de  $M$  de sorte que  $E_{i,j}D = \lambda_j E_{i,j}$ .  
Ainsi  $DE_{i,j} - E_{i,j}D = (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j}$   $\square$

- b) Ce qui s'écrit encore  $P^{-1}APE_{i,j} - E_{i,j}P^{-1}AP = (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j}$  et en multipliant à gauche par  $P$  et à droite par  $P^{-1}$  il vient  $AB_{i,j} - B_{i,j}A = (\lambda_i - \lambda_j)B_{i,j}$   $\square$
- c) Comme l'application  $M \mapsto PMP^{-1}$  est un automorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , les  $n^2$  matrices  $B_{i,j}$  forment une base de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Ainsi les matrices  $B_{i,j}$  forment une base de vecteurs propres pour  $\varphi_A$  qui de ce fait est diagonalisable.  $\square$
7. a)• Comme  $\varphi_A$  est diagonalisable en tant qu'endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  toutes ses valeurs propres sont réelles.  $\square$
- $A$  et  ${}^tA$  ont même polynôme caractéristique.  $\square$
  - $\varphi_A(X^tY) = AX^tY - X^tYA = AX^tY - X^t({}^tAY) = zX^tY - X\bar{z}^tY = (z - \bar{z})X^tY$ .  
Or si  $M = X^tY$  il vient avec des notations claires  $m_{i,j} = x_i y_j$  de sorte que, comme  $X$  et  $Y$  sont non nuls, l'un au moins des coefficients de  $X^tY$  est non nul donc  $X^tY \neq 0$  et ainsi  $z - \bar{z}$  est bien valeur propre de  $\varphi_A$ .  $\square$
- b) Si  $A$  admet une valeur propre complexe non réelle  $z$  alors, comme  $A$  est réelle (donc son polynôme caractéristique à coefficients réels)  $\bar{z}$  est également valeur propre de  $A$ . La question précédente peut donc s'appliquer et il en découle que  $\varphi_A$  admet une valeur propre imaginaire pure ce qui n'est pas puisque par hypothèse  $\varphi_A$  est  $\mathbb{R}$ -diagonalisable. Ainsi si  $\varphi_A$  est  $\mathbb{R}$ -diagonalisable alors toutes les valeurs propres de  $A$  sont réelles.  $\square$
- c) De  $AP_{i,j} - P_{i,j}A = \lambda_{i,j}P_{i,j}$  et  $AX = \lambda X$  on tire  $AP_{i,j}X = P_{i,j}AX + \lambda_{i,j}P_{i,j}X = (\lambda + \lambda_{i,j})P_{i,j}X$   $\square$
- d) Comme  $(P_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  est une base de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et que  $X$  est non nul,  $\text{vect}(P_{i,j}X)_{1 \leq i,j \leq n} = \text{vect}(MX)_{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = \mathbb{R}^n$   
En effet l'application de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}^n$  définie par  $\phi(M) = MX$  est linéaire et surjective : si  $Y$  est un élément quelconque de  $\mathbb{R}^n$  il existe un endomorphisme transformant  $X$  en  $Y$  (comme  $X \neq 0$  on peut le compléter en une base  $\mathcal{B}$  et il suffit de considérer l'endomorphisme défini par le fait qu'il s'annule sur tous les vecteurs de  $\mathcal{B}$  sauf en  $X$  transformé en  $Y$ ).  
Donc il existe au moins  $n$  couples  $(i_k, j_k)$  tels que  $(P_{i_k, j_k}X)_{1 \leq k \leq n}$  soit une base de  $\mathbb{R}^n$ .  
La question c) prouve alors que c'est une base de vecteurs propres de  $A$ .  $\square$

Ainsi  $\varphi_A$  est diagonalisable si et seulement si  $A$  l'est.

### Partie III : Étude des vecteurs propres associés à la valeur propre 0.

8. La famille est libre car si  $\sum_{k=0}^{m-1} a_k A^k = 0$  alors le polynôme  $\sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k$  annule  $A$  donc est nul car de degré strictement inférieur à  $m$ .  
En outre si  $P$  est un polynôme quelconque et  $P = \Pi Q + R$  la division euclidienne de  $P$  par le polynôme minimal  $\Pi$ , il vient d'après le classique morphisme d'algèbre de  $\mathbb{R}[X]$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  :  $P(A) = \Pi(A)Q(A) + R(A) = R(A)$  donc  $P(A) \in \mathbb{R}_{m-1}[A]$  et ainsi la famille est bien génératrice de  $\mathbb{R}[A]$ .  
Ainsi la famille  $(I_n, A, \dots, A^{m-1})$  est bien une base de  $\mathbb{R}[A]$ .  $\square$
9. Si  $P \in \mathbb{R}[X]$  on a  $P(A)$  qui commute avec  $A$  donc  $\mathbb{R}[A] = \mathbb{R}_{m-1}[A] \subset \text{Ker } \varphi_A$  donc  $\dim \text{Ker } \varphi_A \geq m$ .  $\square$
10. Un cas d'égalité.
- a) Si  $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$  c'est à dire  $\lambda_1 u^{n-1}(y) + \lambda_2 u^{n-2}(y) + \dots + \lambda_n y = 0$  il vient en composant par  $u^{n-1}$  que  $\lambda_n = 0$  puis en composant par  $u^{n-2}$  que  $\lambda_{n-1} = 0$ . Itération claire.  
Ainsi la famille est libre donc est bien une base de  $\mathbb{R}^n$  car composée de  $n$  vecteurs.  $\square$
- b) Notons  $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i}$ . En vertu de la question précédente, pour prouver que  $v = w$  il suffit d'établir que  $v(e_i) = w(e_i)$  pour tout  $i$  de 1 à  $n$  c'est à dire encore  $v(u^k(y)) = w(u^k(y))$  pour tout  $k$  de 0 à  $n-1$ .  
Or par définition des  $\alpha_i$  on a  $v(y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i}(y) = w(y)$  (1) donc c'est bien vérifié pour  $k = 0$ .  
En outre comme  $B \in \text{Ker } \varphi_A$  on a  $v$  qui commute avec  $u$  donc avec  $u^k$  et ainsi de (1) on tire pour  $k$  de 1 à  $n-1$  :  
 $v(u^k(y)) = u^k(v(y)) = u^k\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i}(y)\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n+k-i}(y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i}(u^k(y)) = w(u^k(y))$   
Ainsi on a bien  $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i}$   $\square$
- c) On a vu dans les questions 8 et 9 que  $\mathbb{R}(A) = \mathbb{R}_{m-1}(A)$  est de dimension  $m$  et est toujours inclus dans  $\text{Ker } \varphi_A$ . La question précédente montre que lorsque  $A$  est nilpotente d'indice  $n$  alors  $\text{Ker } \varphi_A \subset \mathbb{R}_{m-1}(A)$ .  
Ainsi dans ce cas a-t-on  $\text{Ker } \varphi_A = \mathbb{R}(A) = \mathbb{R}_{m-1}(A)$  et est donc de dimension  $m$ .  $\square$

11. Cas où  $u$  est diagonalisable.

a)  $B \in \text{Ker } \varphi_A$  si et seulement si  $v$  commute avec  $u$  donc si et seulement si  $v(u(x)) = u(v(x))$  pour tout  $x \in E_u(\lambda_k)$  et pour tout  $k$  de 1 à  $p$  puisque  $\mathbb{R}^n = E_u(\lambda_1) \oplus \dots \oplus E_u(\lambda_p)$   
Or pour  $x \in E_u(\lambda_k)$  il vient  $v(u(x)) = v(\lambda_k x) = \lambda_k v(x)$  donc  $v(u(x)) = u(v(x))$  si et seulement si  $v(x) \in E_u(\lambda_k)$ .  
Ainsi  $B \in \text{Ker } \varphi_A$  si et seulement si tout sous-espace propre de  $A$  est stable par  $B$ .  $\square$

b) Donc  $B \in \text{Ker } \varphi_A$  si et seulement si, dans une base adaptée à la décomposition de  $\mathbb{R}^n$  en somme directe des sous-espaces propres de  $u$ , la matrice de  $v$  est une matrice triangulaire par blocs  $\text{diag}(C_1, C_2, \dots, C_p)$  où  $C_k$  est une matrice carrée d'ordre  $m_k$ .  $\square$

c) Il en découle que  $d = \dim_{\text{DEF}} \text{Ker } \varphi_A = \sum_{k=1}^n m_k^2$ .  $\square$

- d) • Si  $p = 7$  alors  $m_k = 1$  pour tout  $k$  et  $d = 7$ .  
• Si  $p = 6$  alors quitte à changer la numérotation on a  $m_1 = 2$  et  $m_k = 1$  pour  $k \geq 2$  donc  $d = 9$   
• Si  $p = 5$  alors  $(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) = (3, 1, 1, 1, 1)$  ou  $(2, 2, 1, 1, 1)$  donc  $d = 13$  ou  $d = 11$   
• Si  $p = 4$  alors  $(m_1, m_2, m_3, m_4) = (4, 1, 1, 1)$  ou  $(3, 2, 1, 1)$  donc  $d = 19$  ou  $d = 15$ .  
• Si  $p = 3$  alors  $(m_1, m_2, m_3) = (5, 1, 1)$  ou  $(4, 2, 1)$  ou  $(3, 3, 1)$  ou  $(3, 2, 2)$  donc  $d = 27$  ou  $d = 21$  ou  $d = 19$  ou  $d = 17$ .  
• Si  $p = 2$  alors  $(m_1, m_2) = (6, 1)$  ou  $(5, 2)$  ou  $(4, 3)$  donc  $d = 37$  ou  $d = 29$  ou  $d = 25$   
• Si  $p = 1$  alors  $m_1 = 7$  et  $d = 49$ .  $\square$

**Partie III : Étude des vecteurs propres associés à une valeur propre non nulle.**

12. La relation proposée est vraie pour  $k = 0$  et pour  $k = 1$ . En outre en supposant qu'elle soit vraie au rang  $k \geq 1$ , en remarquant que  $AB^{k+1} - B^{k+1}A = (AB^k - B^kA)B + B^k(AB - BA)$ , on obtient qu'elle est vraie au rang  $k + 1$ .  
Ainsi  $\varphi_A(B^k) = k\alpha B^k \quad \forall k \in \mathbb{N}$   $\square$

13. Par linéarité de  $\varphi_A$  on en déduit de suite que  $\varphi_A(P(B)) = \alpha BP'(B) \quad \forall P \in \mathbb{R}[X]$   $\square$

14. En particulier avec  $P = \Pi_B$  le polynôme minimal de  $B$ , il vient  $\alpha B\Pi'_B(B) = 0$  donc  $X\Pi'_B$  annule  $B$  puisque  $\alpha \neq 0$ .  
Donc  $X\Pi'_B$  est multiple de  $\Pi_B$  et comme il est de même degré que  $\Pi_B$  on a  $X\Pi'_B = \lambda\Pi_B$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ . La considération des termes de degré  $d$  fournit alors  $\lambda = d$ .  
Ainsi  $X\Pi'_B = d\Pi_B$   $\square$

15. En écrivant que  $\Pi_B(X) = X^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k$  la relation précédente fournit  $(k - d)a_k = 0$  pour  $k$  de 0 à  $d - 1$  donc  $a_k = 0$ . Ainsi  $\Pi_B = X^d$  et donc  $B^d = 0$ .

Si  $B$  est un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle de  $\varphi_A$  alors  $B$  est nilpotente.  $\square$

————— FIN —————