CORRIGÉ : CROCHET DE LIE – ENSAI 2002

I - EXEMPLE.

1. **a)** Par un calcul simple, on obtient : $[e,h](\mathrm{P}) = e(h(\mathrm{P})) - h(e(\mathrm{P})) = 2\mathrm{P}' = 2e(\mathrm{P})$ donc $\boxed{[e,h] = 2e}$

De même, $\boxed{[f,h] = -2f}$ et $\boxed{[e,f] = h}$

b) Si P est un polynôme de degré r, alors, la famille $(e^r(\mathrm{P}), \cdots, e^2(\mathrm{P}), e(\mathrm{P}), \mathrm{P}, f(\mathrm{P}), f^2(\mathrm{P}), \cdots, f^{n-r}(\mathrm{P}))$ est une famille de $n+1$ polynômes échelonnée en degrés. Comme F est un sous espace stable par e et f, c'est une famille d'éléments de F.

On a donc une famille libre de $n+1$ éléments de F, sous espace vectoriel de E espace de dimension $n+1$. Donc $\mathrm{E} = \mathrm{F}$.

2. On suppose ici pour que $(e,f,h) \neq (0,0,0)$. On a alors, $e \neq 0$, $f \neq 0$ et $h \neq 0$ d'après les relations vérifiées par e, f, et h.

On remarque que le "crochet" est bilinéaire et que $\forall u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \quad [u,u] = 0$.

Considérons une combinaison linéaire nulle de e, f et h : $\alpha e + \beta f + \gamma h = 0$.

$0 = [e, [e, \alpha e + \beta f + \gamma h]] = [e, \beta h + 2\gamma e] = 2\beta e$, donc $\underline{\beta = 0}$.

$0 = [e, \alpha e + \gamma h] = +2\gamma e$, donc $\underline{\gamma = 0}$ puis $\underline{\alpha = 0}$.

On en déduit que (e,f,h) est libre et que $\boxed{\dim \mathscr{L}_3 = 3}$.

3. **a)** $x = \alpha e + \beta f + \gamma h \in \mathscr{J}$, donc $[e,[f,x]] = -2\gamma h \in \mathscr{J}$ donc $\underline{h \in \mathscr{J}}$ car $\gamma \neq 0$.

De même, $[f,x] = -\alpha h - 2\gamma f \in \mathscr{J}$ donc $\underline{f \in \mathscr{J}}$. et $[e,x] = \beta h + 2\gamma e \in \mathscr{J}$ donc $\underline{e \in \mathscr{J}}$.

$\mathscr{J}$ st un sous-espace de $\mathscr{L}$ qui contient les trois vecteurs e, f et h d'une base de $\mathscr{L}$ donc $\boxed{\mathscr{J} = \mathscr{L}}$.

b) Si $\mathscr{J} \neq \{0\}$, alors, il contient un vecteur $x = \alpha e + \beta f + \gamma h$ avec $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$ ou $\gamma \neq 0$.

Si $\gamma \neq 0$, alors on a montré que $\boxed{\mathscr{J} = \mathscr{L}}$.

On procède de même si $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$.

4. **a)** Soit y un vecteur propre de h associé à une valeur propre α : $h(y) = \alpha y$.

De $eh - he = 2e$, on déduit $e(h(y)) - h(e(y)) = 2e(y)$ puis $h(e(y)) = (\alpha - 2)e(y)$.

$\boxed{\text{Si } e(y) \neq 0,\ e(y) \text{ est donc un vecteur propre de } h \text{ associé à la valeur propre } \alpha - 2}$

b) h est un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, h possède donc au moins un vecteur propre y associé à une valeur propre α.

S'il n'existait aucun vecteur propre x de h tel que $e(x) = 0$, alors, d'après la question précédente, si y est un vecteur propre de h, $e(y)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\alpha - 2$, $e(e(y))$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\alpha - 4$ etc...

On obtient ainsi une infinité de valeurs propres α, $\alpha - 2$, $\alpha - 4$ etc. ce qui est impossible car l'espace vectoriel E est de dimension finie.

5. **a)** Montrons par récurrence que $h(f^k(x)) = (\alpha + 2k)f^k(x)$.

C'est vrai pour $k = 0$.

Supposons le résultat vrai à un rang k et utilisons la relation $fh - hf = -2f$.

$f(h(f^k(x))) - h(f(f^k(x))) = -2f(f^k(x))$

$(\alpha - 2k)f^{k+1}(x))) - h(f^{k+1}(x)) = -2f^{k+1}(x)$

On en déduit $h(f^{k+1}(x)) = (\alpha + 2(k+1))f^{k+1}(x)$ et on peut conclure d'après le principe de récurrence.

$\boxed{h(f^k(x)) = (\alpha + 2k)f^k(x)}$

b) $f^0(x) = x \neq 0$.

Si pour tout entier naturel m, $f^m(x) \neq 0$, alors on déduit du **a)** l'existence d'une infinité de valeurs propres pour h, endomorphisme d'un espace de dimension finie.

C'est impossible, il existe donc $m \in \mathbb{N}$ tels que $f^m(x) \neq 0$ et $f^{m+1}(x) = 0$.

c) Montrons par récurrence que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $e(f^k(x)) = k(\alpha + k - 1)f^{k-1}(x)$

(cela servira dans la question **7)**).

Pour $k = 1$, de $[e,f] = h$, on déduit $e(f(x)) - f(e(x)) = h(x)$, or $e(x) = 0$ et $h(x) = \alpha x$ donc $e(f(x)) = \alpha x$. L'hypothèse de récurrence au rang 1 est vaie.

Supposons l'hypothèse de récurrence vraie à un rang $k \in \mathbb{N}^*$: $e(f^k(x)) = k(\alpha + k - 1)f^{k-1}(x)$

En appliquant la relation $ef - fe = h$ au vecteur $f^k(x)$, on obtient :

$e(f^{k+1}(x)) = (k(\alpha + k - 1) + \alpha + 2k)f^k(x) = (k+1)(\alpha + k)f^k(x)$, hypothèse de récurrence au rang $k+1$

On peut conclure d'après le principe de récurrence que $\boxed{\text{pour } k \in \mathbb{N}^*,\ e(f^k(x)) = k(\alpha + k - 1)f^{k-1}(x)}$

On en déduit que $\boxed{\text{pour } k \in \mathbb{N}^*,\ e(f^k(x)) \text{ est colinéaire à } f^{k-1}(x)}$.

6. **a)** $\mathrm{F}=\mathrm{Vect}\{x,f(x),\cdots,f^m(x)\}$, on utilise les résultats de la question **5)**
$f^{m+1}(x)=0$ donc F est stable par f.
$\forall k\in\mathbb{N},\quad h(f^k(x))=(\alpha+2k)f^k(x)\in\mathrm{F}$, on en déduit que F est stable par h.
$e(x)=0$ et $\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad e(f^k(x))=k(\alpha+k-1)f^{k-1}(x)\in\mathrm{F}$, on en déduit que F est stable par e.

$\boxed{\text{F est donc stable par } e,\ f \text{ et } h}$

On sait que $\mathrm{F}\neq\{0\}$ car $x\neq 0$, or E ne contient aucun sous-espace stable par $\mathscr{L}_3$ autre que $\{0\}$ et E. On a donc $\boxed{\mathrm{F}=\mathrm{E}}$

b) En **a)**, on a montré que $\mathscr{B}=(x,f(x),\cdots,f^m(x))$ est une famille génératrice de E.
Considérons une combinaison linéaire nulle des vecteurs de $\mathscr{B}$: $a_0x+a_1f(x)+\cdots+a_mf^m(x)=0$.
$f^m(x)\neq 0$ et $f^{m+1}(x)=0$, donc si on applique f^m à l'expression précédente, il reste : $a_0f^m(x)=0$. On en déduit que $a_0=0$.
On recommence en appliquant f^{m-1} puis f^{m-2} etc. et on en déduit $a_1=0$ puis $a_2=0$ etc.
La famille $\mathscr{B}$ est donc libre.
Finalement : $\boxed{\mathscr{B}=(x,f(x),\cdots,f^m(x)) \text{ est une base de E}}$

c) On a vu que $\forall k\in\mathbb{N},\ h(f^k(x))=(\alpha+2k)f^k(x)$, la matrice dans la base $\mathscr{B}=(x,f(x),\cdots,f^m(x))$ est donc la matrice diagonale d'ordre $m+1$ dont les éléments diagonaux sont : $\alpha,\alpha+2,\cdots,\alpha+2m$

d) De **c)**, on déduit : $\mathrm{tr}\,h=(m+1)\alpha+2\sum_{k=0}^{m}k=(m+1)\alpha+m(m+1)=(m+1)(\alpha+m)$
De $[e,f]=h$, on déduit : $\mathrm{tr}\,h=\mathrm{tr}(ef-fe)=\mathrm{tr}(ef)-\mathrm{tr}(fe)=0$
On a donc $\boxed{\alpha=-m}$

7. On a montré que pour $k\in\mathbb{N}^*$, $e(f^k(x))=k(\alpha+k-1)f^{k-1}(x)$, de plus $e(x)=0$, on en déduit que la matrice de e dans la base $\mathscr{B}$ est $(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m+1\\ 1\leqslant j\leqslant m+1}}$ avec $a_{ij}=(i+1)(\alpha+i)$ si $j=i+1$ et $a_{ij}=0$ sinon.

II - PRÉLIMINAIRE À L'ÉTUDE DE $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Notons $n=\dim\mathrm{E}$.
Si $a\in\mathscr{L}(\mathrm{E})$ possède une unique valeur propre λ, alors son polynôme caractéristique est $(\lambda-\mathrm{X})^n$.
Du théorème de Cayley-Hamilton, on déduit alors que $(\lambda\,\mathrm{Id}-a)^n=0$. $\boxed{(a-\lambda\,\mathrm{Id}) \text{ est donc nilpotent}}$

Réciproquement, si il existe λ tel que $(a-\lambda\,\mathrm{Id})$ est nilpotent, alors a possède un polynôme annulateur de la forme $(\mathrm{X}-\lambda)^m$. Les valeurs propres de a étant incluses dans l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur, la seule valeur propre possible de a est λ. Et λ est effectivement valeur propre puisque $a-\lambda\,\mathrm{Id}$ n'est pas injectif.

2. Supposons u nilpotent d'ordre p et v nilpotent d'ordre q.
Comme u et v commutent, on peut utiliser le binôme de Newton : $(u-v)^{p+q}=\sum_{k=0}^{p+q}\binom{p+q}{k}u^kv^{p+q-k}$.
$u^p=0$ donc tous les termes d'indice $k\geqslant p$ sont nuls.
$v^q=0$ donc tous les termes d'indice $k\leqslant p$ sont nuls.
On a donc $(u-v)^{p+q}=0$. $\boxed{u-v \text{ est bien nilpotent.}}$

3. **a)** $(\mathrm{Ker}\,u^n)=(\bigcup_{p=0}^{n}\mathrm{Ker}\,u^p)$ est une suite croissante de sous-espaces de E, E est de dimension finie, cette suite est donc stationnaire, constante à partir d'un certain rang p_0. On a donc $\boxed{\mathscr{N}_u\bigcup_{p=0}^{\infty}=\mathrm{Ker}\,u^p=\mathrm{Ker}\,u^{p_0}.}$

De même, $(\mathrm{Im}\,u^n)=(\bigcap_{p=0}^{n}\mathrm{Im}\,u^p)$ est une suite décroissante de sous-espace de E, constante à partir du même rang p_0 car $\dim\mathrm{Ker}\,u^n+\dim\mathrm{Im}\,u^n=\mathrm{E}$. On a donc $\boxed{\mathscr{G}_u=\bigcap_{p=0}^{\infty}\mathrm{Im}\,u^p=\mathrm{Im}\,u^{p_0}.}$

b) Soit $x\in\mathscr{N}_u\cap\mathscr{G}_u$. $u^{p_0}(x)=0$ et il existe $y\in\mathrm{E}$ tel que $x=u^{p_0}(y)$.
On a alors $u^{2p_0}(y)=0$, donc $y\in\mathrm{Ker}\,u^{2p_0}$. Comme $\mathrm{Ker}\,u^{2p_0}=\mathrm{Ker}\,u^{p_0}$, on a $u^{p_0}(y)=0$ et donc $x=0$ d'où $\mathscr{N}_u\cap\mathscr{G}_u=\{0\}$.
De plus $\dim\mathscr{N}_u+\dim\mathscr{G}_u=\dim\mathrm{Ker}\,u^{p_0}+\dim\mathrm{Im}\,u^{p_0}=\dim\mathrm{E}$.
On en déduit que $\boxed{\mathscr{N}_u\oplus\mathscr{G}_u=\mathrm{E}.}$

u commute avec u^{p_0} donc $\mathrm{Ker}\, u^{p_0}$ et $\mathrm{Im}\, u^{p_0}$ sont stables par u : $\boxed{\mathcal{N}_u \text{ et } \mathcal{G}_u \text{ sont stables par } u.}$

La restriction de u à $\mathcal{N}_u$ est nilpotente d'indice p_0.

La restriction de u à $\mathcal{G}_u$ est bijective car son noyau est réduit à $\{0\}$ et que l'on est en dimension finie.

c) Soit n tel que la restriction de u à F soit nilpotente d'indice n.

Soit $x \in \mathrm{E}$. On le décompose suivant la somme directe $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{E}$: $x = x_\mathrm{F} + x_\mathrm{G}$. ($u^n(x_\mathrm{F}) = 0$ et $u(x_\mathrm{G}) \in \mathrm{G}$)

$\forall k \geqslant n, \quad u^k(x) = u^k(x_\mathrm{G}) \in \mathrm{G}$, donc $\forall k \geqslant n$, $\mathrm{Im}\, u^k \subset \mathrm{G}$.

D'autre part, la restriction de u à G est bijective donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{G} = \mathrm{Im}\, u^k$.

Comme la suite $(\mathrm{Im}\, u^n) = (\bigcap_{p=0}^{n} \mathrm{Im}\, u^p)$ est décroissante, $\boxed{\mathcal{G}_u = \bigcap_{p=0}^{\infty} \mathrm{Im}\, u^p = \mathrm{G}.}$

$\forall x \in \mathrm{F}, \quad u^n(x) = 0$ donc $\mathrm{F} \subset \mathrm{Ker}\, u^n$. On en déduit que $\mathrm{F} \subset \bigcup_{p=0}^{\infty} \mathrm{Ker}\, u^p = \mathcal{N}_u$.

Or $\dim \mathrm{F} = \dim \mathrm{E} - \dim \mathrm{G}$, $\dim \mathcal{N}_u = \dim \mathrm{E} - \dim \mathcal{G}_u$ et $\mathrm{G} = \mathcal{G}_u$. On en déduit $\boxed{\mathrm{F} = \mathcal{N}_u.}$

III - ETUDE DE $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. a) Soit λ une valeur propre de A associée au vecteur propre X et M la matrice carrée d'ordre n dont chaque colonne est égale à X. On voit que $\phi_\mathrm{A}(\mathrm{M}) = \mathrm{MA} = \lambda \mathrm{A}$. λ est donc une valeur propre de ϕ_A.

Soit λ une valeur propre de ϕ_A associée à M : $\phi_a(\mathrm{M}) = \lambda \mathrm{M}$. Chaque colonne non nulle de M est alors un vecteur propre de A. λ est donc une valeur propre de A.

$\boxed{\text{Les valeurs propres de l'endomorphisme } \phi_a \text{ sont bien les valeurs propres de A.}}$

b) $\psi_\mathrm{A}(\mathrm{M}) = \mathrm{MA}$, or $\mathrm{MA} = \lambda \mathrm{A}$ si et seulement si ${}^t\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{M} = \lambda\,{}^t\mathrm{M}$

D'après la question précédente, $\boxed{\text{les valeurs propres de l'endomorphisme } \psi_a \text{ sont les valeurs propres de A.}}$

2. a) $(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n)^\alpha$ commute avec A donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n)^\alpha$ est stable par A.

$({}^t\mathrm{A} - \mu \mathrm{I}_n)^\beta$ commute avec ${}^t\mathrm{A}$ donc $\mathrm{Ker}({}^t\mathrm{A} - \mu \mathrm{I}_n)^\beta$ est stable par ${}^t\mathrm{A}$.

Si $\mathrm{U} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n)^\alpha$ et $\mathrm{V} \in \mathrm{Ker}({}^t\mathrm{A} - \mu \mathrm{I}_n)^\beta$, alors $\mathrm{AU} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n)^\alpha$ et ${}^t\mathrm{AV} \in \mathrm{Ker}({}^t\mathrm{A} - \mu \mathrm{I}_n)^\beta$.

On en déduit que $\theta_\mathrm{A}(\mathrm{U}^t\mathrm{V}) = \mathrm{AU}^t\mathrm{V} - \mathrm{U}^t\mathrm{VA} = (\mathrm{AU})^t\mathrm{V} - \mathrm{V}^t({}^t\mathrm{AV}) \in \mathcal{L}_{\lambda\mu}$. $\boxed{\mathcal{L}_{\lambda,\mu} \text{ est donc stable par } \theta_\mathrm{A}.}$

b) La restriction de $\phi_\mathrm{A} - \lambda \mathrm{Id}$ à $\mathcal{L}_{\lambda\mu}$ est un endomorphisme nilpotent, en effet, pour $\mathrm{U} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n)^\alpha$ et $\mathrm{V} \in \mathrm{Ker}({}^t\mathrm{A} - \mu \mathrm{I}_n)^\beta$, $(\phi_a - \lambda \mathrm{Id})^\alpha(\mathrm{U}^t\mathrm{V}) = (\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n)^\alpha \mathrm{U}^t\mathrm{V} = 0$ car $\mathrm{U} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n)^\alpha$.

De même, la restriction de $\psi_\mathrm{A} - \mu \mathrm{Id}$ à $\mathcal{L}_{\lambda\mu}$ est un endomorphisme nilpotent, en effet, pour $\mathrm{U} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n)^\alpha$ et $\mathrm{V} \in \mathrm{Ker}({}^t\mathrm{A} - \mu \mathrm{I}_n)^\beta$, $(\phi_a - \lambda \mathrm{Id})^\beta(\mathrm{U}^t\mathrm{V}) = \mathrm{U}^t\mathrm{V}(\mathrm{A} - \mu \mathrm{I}_n)^\beta = \mathrm{U}^t(({}^t\mathrm{A} - \mu \mathrm{I}_n)^\beta \mathrm{V}) = 0$ car $\mathrm{V} \in \mathrm{Ker}({}^t\mathrm{A} - \mu \mathrm{I}_n)^\beta$.

De plus ϕ_A et ψ_A commutent car pour toute matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\phi_\mathrm{A}(\psi_\mathrm{A}(\mathrm{M})) = \psi_\mathrm{A}(\phi_\mathrm{A}(\mathrm{M})) = \mathrm{AMA}$, $\phi_\mathrm{A} - \lambda \mathrm{Id}$ et $\psi_\mathrm{A} - \mu \mathrm{Id}$ commutent donc également.

De la question **II 2)**, on déduit que la restriction de $(\phi_\mathrm{A} - \psi_\mathrm{A}) - (\lambda - \mu)\mathrm{Id}$ à $\mathcal{L}_{\lambda\mu}$ est un endomorphisme nilpotent.

De la question **II 1)**, on déduit ensuite que la restriction de $\theta_\mathrm{A} = \phi_\mathrm{A} - \psi_\mathrm{A}$ à $\mathcal{L}_{\lambda\mu}$ possède $\lambda - \mu$ comme unique valeur propre.

Donc : $\boxed{\text{la restriction de } \theta_\mathrm{A} \text{ à } \mathcal{L}_{\lambda\mu} \text{ possède } \lambda - \mu \text{ comme unique valeur propre.}}$

3. a) On suppose que les familles $\mathcal{F} = (\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \cdots, \mathrm{U}_p)$ et $\mathcal{G} = (\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \cdots, \mathrm{V}_q)$ sont libres et on note $(b_{kj})_{1 \leqslant k \leqslant n}$ les coefficients de la matrice V_j.

Considérons une combinaison linéaire nulle de la famille $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$: $\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}} \alpha_{ij} \mathrm{U}_i {}^t\mathrm{V}_j = 0$.

En séparant les deux sommes, $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{U}_i {}^t\Big(\sum_{j=1}^{q} \alpha_{ij} \mathrm{V}_j\Big) = 0$

On obtient une matrice carrée d'ordre n dont la k ième colonne est : $\sum_{i=1}^{p} \Big(\sum_{j=1}^{q} \alpha_{ij} b_{kj}\Big) \mathrm{U}_i = 0$

Comme la famille $\mathcal{F} = (\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \cdots, \mathrm{U}_p)$ est libre, on en déduit que les scalaires $\sum_{j=1}^{q} \alpha_{ij} b_{kj}$ sont tous nuls, puis que pour tout i : $\sum_{j=1}^{q} \alpha_{ij} \mathrm{V}_j = 0$ et comme $\mathcal{G} = (\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \cdots, \mathrm{V}_q)$ est libre, tous les α_{ij} sont nuls.

$\boxed{\text{La famille } \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \text{ est donc libre}}$

b) Soit $U \in \mathrm{Ker}(A-\lambda I_n)^{\alpha}$ et $V \in \mathrm{Ker}({}^tA-\mu I_n)^{\beta}$. De la décomposition de U dans la base $\mathscr{B}_\lambda$ et de la décomposition de V dans la base $\mathscr{B}^*_\mu$, on déduit immédiatement un décomposition de U^tV dans $\mathscr{B}_\lambda \otimes \mathscr{B}^*_\mu$, donc $\mathscr{B}_\lambda \otimes \mathscr{B}^*_\mu$ est une famille génératrice de $\mathscr{L}_{\lambda,\mu}$.

C'est une famille libre, d'après **a)** .

$\boxed{\mathscr{B}_\lambda \otimes \mathscr{B}^*_\mu \text{ est bien une base de } \mathscr{L}_{\lambda,\mu}.}$

c) On note $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de A de multiplicités respectives : $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$.

On utilise le théorème de décomposition des noyaux pour A et pour ${}^tA$:

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(A-\lambda_i I_n)^{\alpha_i} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}({}^tA-\lambda_i I_n)^{\alpha_i}$$

On note $(U_1,\cdots,U_n)$ une base de $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{C})$ adaptée à la première somme directe et $(V_1,\cdots,V_n)$ une base de $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{C})$ adaptée à la seconde somme directe.

De **3.a)**, on déduit que $(U_i\,{}^tV_j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ est une famille libre de n^2 vecteurs de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, c'est donc une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

On fait ensuite une partition de cette base : $\left(\mathscr{B}_{\lambda_i} \otimes \mathscr{B}^*_{\lambda_j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ ou bien avec les notations de l'énoncé :

$\left(\mathscr{B}_\lambda \otimes \mathscr{B}^*_\mu\right)_{(\lambda,\mu)\in(\mathrm{Sp}A)^2}$ d'où l'on déduit : $\boxed{\mathscr{M}_n(\mathbb{C}) = \bigoplus_{(\mathrm{Sp}A)^2} \mathscr{L}_{\lambda\mu}}$

4. On a montré que $\mathscr{L}_{\lambda\mu}$ est stable par θ_A et que la restriction de θ_A à $\mathscr{L}_{\lambda\mu}$ possède $\lambda-\mu$ comme unique valeur propre.
La restriction de θ_A à $\mathscr{L}_{\lambda\mu}$ est donc bijective si $\lambda \neq \mu$, et nilpotente si $\lambda = \mu$.

Notons $F = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}A} \mathscr{L}_{\lambda\lambda}$ et $G = \bigoplus_{\substack{(\lambda,\mu)\in(\mathrm{Sp}A)^2\\\lambda\neq\mu}} \mathscr{L}_{\lambda\mu}$

On a évidemment $\mathscr{M}_n(\mathbb{C}) = F\oplus G$, de plus la restriction de θ_A à F est nilpotente et la restriction de θ_A à G est bijective.

De la question **II 3.c)**, on déduit alors que $\boxed{\mathscr{N}_{\theta_A} = F = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Spec}A} \mathscr{L}_{\lambda\lambda}}$

5. a) Soient $p_1,\cdots,p_n$ des entiers positifs ou nuls tels que $\sum_{k=1}^{n} p_k = n$.

$$\sum_{k=1}^{n} p_k^2 - n = \sum_{k=1}^{n}(p_k^2-p_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k(p_k-1)$$

p_k est un entier naturel, donc $p_k(p_k-1) \geqslant 0$ et $\sum_{k=1}^{n} p_k^2 \geqslant n$.

De plus $\sum_{k=1}^{n} p_k^2 = n$ si et seulement si les p_k sont tous égaux à 0 ou 1, comme $\sum_{k=1}^{n} p_k = n$, le seul cas possible pour avoir $\sum_{k=1}^{n} p_k^2 = n$ est $p_k = 1$ pour tout k.

$\boxed{\sum_{k=1}^{n} p_k^2 \text{ est bien minimal lorsque, pour tout } k,\ p_k = 1.}$

b) En reprenant les notations de la question **4)** : $\dim \mathscr{N}_{\theta_A} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^2$, et $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = n$.

On se ramène à la question précédente en posant $\alpha_i = 0$ pour $r < i \leqslant n$.

On voit alors qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $\dim \mathscr{N}_{\theta_A}$ soit minimale est :

$\forall i \in [1,n], \quad \alpha_i = 1$

Autrement dit : $\boxed{\dim \mathscr{N}_{\theta_A} \text{ est minimale si et seulement si A possède } n \text{ valeurs propres distinctes}}$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆