

Préparation aux Concours (CNC)

Crochet de Lie

Dans tout le problème n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{C} . Si $a, b \in \mathcal{L}(E)$, l'endomorphisme $a \circ b$ sera noté ab et l'on pose $[a, b] = ab - ba$.

Pour $a \in \mathcal{L}(E)$, on note θ_a l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini par $\theta_a(b) = [a, b] = ab - ba$.

On admettra le *théorème de décomposition des noyaux* (cf. problème n°2) :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ses valeurs propres distinctes et $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ leur multiplicité respective ; alors $E = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(u - \lambda_i \text{Id})^{\alpha_i}$.

L'objet du problème est d'étudier dans quelques cas particuliers des propriétés du « crochet » $[,]$.

I - EXEMPLE.

1. On suppose dans cette question que $E = \mathbb{C}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré au plus n , à coefficients dans \mathbb{C} , et l'on pose pour $P \in E$

$$e(P) = P' \quad , \quad f(P) = -nXP + X^2P' \quad , \quad h(P) = -nP + 2XP'.$$

a) Calculer $[e, h]$, $[f, h]$, $[e, f]$.

b) Soit $F \neq \{0\}$ un sous-espace vectoriel de E stable par e et f , et soit $P \neq 0$ un élément de F . En examinant les degrés des images successives de P par e et par f , prouver que $F = E$.

E désigne maintenant un \mathbb{C} -espace vectoriel quelconque de dimension finie. On considère 3 éléments de $\mathcal{L}(E)$ notés e, f, h et vérifiant :

$$[e, h] = 2e \quad , \quad [f, h] = -2f \quad , \quad [e, f] = h \quad , \quad (e, f, h) \neq (0, 0, 0).$$

On note \mathcal{L}_3 le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ qu'ils engendrent.

2. Prouver que $\dim \mathcal{L}_3 = 3$.

3. Soit \mathcal{I} un sous-espace vectoriel de \mathcal{L}_3 tel que

$$\forall g \in \mathcal{I}, \forall a \in \mathcal{L}_3, [a, g] \in \mathcal{I}.$$

a) Montrer que si \mathcal{I} contient un élément $g = \alpha e + \beta f + \gamma h$ avec $\gamma \neq 0$, alors $\mathcal{I} = \mathcal{L}_3$.

b) Prouver que si $\mathcal{I} \neq \{0\}$ alors $\mathcal{I} = \mathcal{L}_3$ (on pourra se ramener à la question précédente).

4. a) Soit y un vecteur propre de h ; prouver que si $e(y) \neq 0$, alors $e(y)$ est un vecteur propre de h .

b) En déduire qu'il existe un vecteur propre x de h tel que $e(x) = 0$.

Dans la suite de cette partie, on note x un tel vecteur, et on note α la valeur propre de h associée.

5. a) Calculer $h(f^k(x))$ où k est un entier naturel.

b) En déduire qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $f^m(x) \neq 0$ et $f^{m+1}(x) = 0$.

c) Prouver que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $e(f^k(x))$ est colinéaire à $f^{k-1}(x)$.

6. On suppose que E ne contient aucun sous-espace stable par \mathcal{L}_3 autre que $\{0\}$ et E . On pose

$$F = \text{Vect}(x, f(x), \dots, f^m(x))$$

a) Justifier que F est stable par e, f et h . Que peut-on en déduire ?

b) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (x, f(x), \dots, f^m(x))$ est une base de F .

c) Déterminer la matrice de h dans la base \mathcal{B} .

d) En examinant $\text{tr } h$, prouver que $\alpha = -m$.

7. Déterminer la matrice de e dans la base \mathcal{B} .

II - PRÉLIMINAIRE À L'ÉTUDE DE $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Dans cette partie E désigne toujours un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie.

1. Prouver qu'un endomorphisme a de E possède une seule valeur propre si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $a - \lambda Id$ soit nilpotent.
2. Soit u et v deux endomorphismes nilpotents commutant entre eux. Prouver que $u - v$ est nilpotent.
3. Soit u un endomorphisme de E ; on pose $\mathcal{N}_u = \bigcup_{p=0}^{\infty} \text{Ker } u^p$ et $\mathcal{G}_u = \bigcap_{p=0}^{\infty} \text{Im } u^p$.
 - a) Prouver qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{N}_u = \text{Ker } u^{p_0}$ et $\mathcal{G}_u = \text{Im } u^{p_0}$.
 - b) Prouver que \mathcal{N}_u et \mathcal{G}_u sont deux sous-espaces supplémentaires, stables par u , tels que u restreint à \mathcal{N}_u soit nilpotent et que u restreint à \mathcal{G}_u soit bijectif.
 - c) Prouver réciproquement que si $E = F \oplus G$ où F et G sont deux sous-espaces stables par u tels que la restriction de u à F soit nilpotente et la restriction de u à G bijective, alors $F = \mathcal{N}_u$ et $G = \mathcal{G}_u$.

On vient donc de prouver l'existence et l'unicité de tels sous-espaces F et G .

III - ÉTUDE DE $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Dans cette partie, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et l'on note θ_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $\theta_A(B) = AB - BA$.

1. a) Montrer que les valeurs propres de l'endomorphisme ϕ_A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $\phi_A(M) = AM$ sont les valeurs propres de A .

b) Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme ψ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $\psi(M) = MA$.

Étant donnée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on considère λ et μ deux valeurs propres de A de multiplicité respective α et β . On pose

$$\mathcal{L}_{\lambda, \mu} = \text{Vect} \left\{ U^t V, U \in \text{Ker}(A - \lambda I_n)^\alpha; V \in \text{Ker}({}^t A - \mu I_n)^\beta \right\}.$$

2. a) Prouver que le sous-espace $\mathcal{L}_{\lambda, \mu}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est stable par θ_A .

b) Prouver que la restriction de θ_A à $\mathcal{L}_{\lambda, \mu}$ admet pour unique valeur propre $\lambda - \mu$ (on remarquera que $\theta_A = \phi_A - \psi_A$, et on utilisera les résultats des questions II.1 et II.2).
3. a) Soit $\mathcal{F} = (U_1, \dots, U_p)$ et $\mathcal{G} = (V_1, \dots, V_q)$ deux familles de vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Prouver que si les familles \mathcal{F} et \mathcal{G} sont libres, la famille $\{U_i^t V_j, i \in [1, p], j \in [1, q]\}$, qu'on notera $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$, est libre.

b) On note \mathcal{B}_λ une base de $\text{Ker}(A - \lambda I_n)^\alpha$ et \mathcal{B}_μ^* une base de $\text{Ker}({}^t A - \mu I_n)^\beta$. Prouver que la famille $\mathcal{B}_\lambda \otimes \mathcal{B}_\mu^*$ est une base de $\mathcal{L}_{\lambda, \mu}$.

c) En déduire que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \bigoplus_{(\lambda, \mu) \in (\text{Sp}A)^2} \mathcal{L}_{\lambda, \mu}$ où $\text{Sp}A$ désigne l'ensemble des valeurs propres de A .

4. Déterminer \mathcal{N}_{θ_A} (on utilisera la question II.3°c).

5. a) Soit p_1, \dots, p_n des entiers positifs ou nuls tels que $\sum_{k=1}^n p_k = n$. Prouver que $\sum_{k=1}^n p_k^2$ est minimal lorsque $\forall k \in [1, n], p_k = 1$.

b) En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur A pour que $\dim \mathcal{N}_{\theta_A}$ soit minimale.

* * * *
* * *
* *
*