Corrigé de la seconde épreuve de mathématiques

Mines 2007 - Filière MP

I Algèbres de Lie

1 - Pour toute matrice M de $\mathcal{V}$, X est un vecteur propre de M : il existe donc un unique scalaire $\lambda(M)$ tel que $MX = \lambda(M)X$. Pour $M_1, M_2 \in \mathcal{V}$ et $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$,

$$(\mu_1 M_1 + \mu_2 M_2)X = (\mu_1 \lambda(M_1) + \mu_2 \lambda(M_2))X$$

et donc $\lambda(\mu_1 M_1 + \mu_2 M_2) = \mu_1 \lambda(M_1) + \mu_2 \lambda(M_2)$: l'application $\lambda : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{C}$ est bien une forme linéaire.

2 - Comme M et A sont éléments de $\mathcal{U}$, $[M, A] \in [\mathcal{U}]$ et donc $[M, A] \in \mathcal{V}$.

3 - Considérons l'hypothèse de récurrence (H_i) :

$$\forall\, M \in \mathcal{V},\ MX_i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_{i-j}(M) X_j$$

- La propriété H_0 est trivialement vérifiée :

$$\forall\, M \in \mathcal{V},\ MX_0 = MX = \lambda(M)X = \lambda_0(M)X_0 = \sum_{j=0}^{0} \binom{0}{j} \lambda_{-j}(M) X_j$$

- Soit $i \in \mathbb{N}$ et supposons que H_i soit vérifiée. Alors pour tout $M \in \mathcal{V}$:

$$MX_{i+1} = MAX_i = [M, A]X_i + AMX_i$$

En appliquant (H_i) aux deux éléments M et $[M, A]$ de $\mathcal{V}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
MX_{i+1} &= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_{i-j}([M, A]) X_j + A \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_{i-j}(M) X_j \\
&= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_{i-j+1}(M) X_j + \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_{i-j}(M) X_{j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_{i-j+1}(M) X_j + \sum_{j=1}^{i+1} \binom{i}{j-1} \lambda_{i-j+1}(M) X_j \\
&= \lambda_{i+1}(M) X_0 + \sum_{j=1}^{i} \underbrace{\left[\binom{i}{j} + \binom{i}{j-1}\right]}_{=\binom{i+1}{j}} \lambda_{i-j+1}(M) X_j + \lambda_0(M) X_{i+1} \\
&= \sum_{j=0}^{i+1} \binom{i+1}{j} \lambda_{i+1-j}(M) X_j
\end{aligned}$$

Nous avons donc démontré par récurrence que (H_i) est vérifiée pour tout $i \in \mathbb{N}$, ce qui donne bien les identités (1) et (2).

4 - L'ensemble des entiers $i \geq 0$ pour lesquels la famille $\{X_0, X_1, \ldots, X_i\}$ est libre est non vide (il contient 0 car X_0 est non nul) et majoré par n : il admet donc un plus grand élément q.

5 - La stabilité de G par $\overline{M}$ découle directement des relations (1).

D'autre part :

- pour i compris entre 0 et $q-1$, $\overline{A}(X_i) = AX_i = X_{i+1} \in G$;
- $\overline{A}(X_q) = X_{q+1} \in G$ car $\{X_0, X_1, \ldots, X_q\}$ est libre et $\{X_0, X_1, \ldots, X_{q+1}\}$ est liée,

donc G est également stable par $\overline{A}$.

Enfin, par composition, G est stable par $\overline{[M,A]}$. On en déduit que $\overline{M_G}$, $\overline{A_G}$ et $\overline{[M,A]}_G$ sont des endomorphismes de G.

6 - Comme $\overline{[M,A]}_G = \overline{M}_G \circ \overline{A}_G - \overline{A}_G \circ \overline{M}_G$, la trace de $\overline{[M,A]}_G$ est nulle (linéarité de la trace et propriété classique $\mathrm{Tr}(f \circ g) = \mathrm{Tr}(g \circ f)$).

7 - Les relations (2) montrent que cette matrice est triangulaire supérieure, de terme général $\begin{pmatrix} i-1 \\ j-1 \end{pmatrix} \lambda_{i-j+1}(M)$ pour $1 \leq j \leq i \leq q+1$.

8 - En particulier, $0 = \mathrm{Tr}(\overline{[M,A]}_G) = (q+1)\lambda_1(M) = (q+1)\lambda([M,A])$ et $\lambda([M,A]) = 0$ puisque $q+1 > 0$.

9 - Nous en déduisons que $MAX = AMX$, i.e. $M(AX) = A(\lambda(M)X) = \lambda(M)(AX)$. Ainsi, ou bien $AX = 0$, ou bien AX est un vecteur propre pour chaque matrice M de $\mathcal{V}$, associé à la même valeur propre que X.

II Algèbres de Lie résolubles

10 - Cette propriété traduit que les endomorphismes associés aux éléments de $\mathcal{U}$ sont simultanément trigonalisables, i.e. trigonalisables dans une même base de $\mathbb{C}^n$.

11 - Pour tout k compris entre 0 et n, notons E_k le sous-espace de $\mathbb{C}^n$ engendré par les k premiers vecteurs colonnes de la matrice P. Une matrice A est donc dans $\mathcal{N}_k$ si et seulement si

$$\overline{A}(E_n) \subset E_{n-k},\ \overline{A}(E_{n-1}) \subset E_{n-1-k},\ \ldots,\ \overline{A}(E_k) \subset E_0.$$

Pour k entier compris entre 0 et $n-1$, montrons que $[\mathcal{N}_k] \subset \mathcal{N}_{k+1}$:

- si $k \geq 1$ et si A et B sont deux éléments de $\mathcal{N}_k$, on a pour tout i compris entre $k+1$ et n :

$$\begin{array}{rcl} \overline{[A,B]}(E_i) & \subset & \overline{A}(\overline{B}(E_i)) + \overline{B}(\overline{A}(E_i)) \\ & \subset & \overline{A}(E_{i-k}) + \overline{B}(E_{i-k}) \\ & \subset & E_{i-k-1} \end{array}$$

  car $k \geq 1$. On a donc $[A,B] \in \mathcal{N}_{k+1}$.

- si $k = 0$ et si A et B sont deux éléments de $\mathcal{N}_k$, les matrices AB et BA sont triangulaires supérieures et ont même diagonale : la matrice $[A,B]$ est donc diagonale supérieure stricte, i.e. que $[A,B] \in \mathcal{N}_{k+1}$.

Dans tous les cas, $[\mathcal{N}_k] \subset \mathcal{N}_{k+1}$ puisque $\mathcal{N}_{k+1}$ est un sous-espace vectoriel.

Ceci prouve que la suite $(\mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_n)$ est une suite d'algèbres de Lie vérifiant les propriétés (A) et (B) : $\mathcal{T}_P$ est donc une algèbre de Lie résoluble de longueur n.

Remarques : la longueur obtenue ici n'est pas optimale. Par exemple, quand $n = 4$, $\mathcal{T}_P$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur 3, puisque $[\mathcal{N}_2] = \{0\}$.

Cette question prouve en fait une implication du théorème 2 : si $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie dont les éléments sont simultanément trigonalisables, il existe une matrice inversible P telle que $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}_P$. On obtient alors que $\mathcal{U}$ est résoluble de longueur n en considérant la suite $(\mathcal{U} \cap \mathcal{N}_k)_{0 \leq k \leq n}$.

12 - Nous avons $[\mathcal{U}] = [\mathcal{U}_0] \subset \mathcal{U}_1 = \{0\}$, donc $[M, M'] = 0$ pour tous $M, M' \in \mathcal{U}$: les éléments de $\mathcal{U}$ commutent deux à deux.

13 - Prouvons le résultat suivant par récurrence sur r : r endomorphismes d'un espace vectoriel complexe de dimension finie non nulle qui commutent deux à deux possèdent un vecteur propre commun.

- Si $r = 1$ et si $f_1 \in \mathcal{L}(E)$ avec E espace complexe de dimension non nulle, f_1 possède au moins une valeur propre (son polynôme caractéristique est de degré au moins 1 et $\mathbb{C}$ est algébriquement clos), donc également un vecteur propre.

- Soit $r \geq 1$. Supposons la propriété vérifiée au rang r et considérons une famille $(f_i)_{1 \leq i \leq r+1}$ d'endomorphismes d'un espace vectoriel complexe E de dimension non nulle. f_{r+1} possède au moins une valeur propre λ : notons $F = \mathrm{Ker}\,(f_{r+1} - \lambda Id_E)$ l'espace propre associé. On montre alors facilement que F est stable par les f_i, pour i variant de 1 à r :

$$\forall\, i,\ \forall x \in F,\ f_{r+1}(f_i(x)) = f_i(f_{r+1}(x)) = f_i(\lambda x) = \lambda f_i(x)$$

  En notant g_i la restriction de f_i à F, il est possible d'appliquer l'hypothèse de récurrence à la famille $(g_i)_{1 \leq i \leq r}$ (F est de dimension non nulle et les g_i commutent deux à deux) : il existe un vecteur $x \in F$ qui est propre pour tous les g_i : ce vecteur est donc un vecteur propre pour tous les f_i $(0 \leq i \leq r+1)$.

Le résultat demandé est alors une conséquence directe.

14 - Soit $(M_1, M_2, \ldots, M_r)$ une base de $\mathcal{U}$. D'après le résultat précédent, il existe un vecteur propre X commun aux endomorphismes $\overline{M_1}, \overline{M_2}, \ldots, \overline{M_r}$: si $M \in \mathcal{U}$, avec $M = \alpha_1 M_1 + \cdots + \alpha_r M_r$, on a directement :

$$\overline{M}(X) = \alpha_1 \lambda(M_1) X + \cdots + \alpha_r \lambda(M_r) X = (\alpha_1 \lambda(M_1) + \cdots + \alpha_r \lambda(M_r))\, X$$

et donc X est propre pour tous les endomorphismes associés aux éléments de $\mathcal{U}$.

Remarque : il aurait été plus pratique de démontrer directement par récurrence sur n le résultat classique : pour toute famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel complexe de dimension $n \geq 1$ commutant deux à deux, il existe un vecteur propre commun à tous les éléments de la famille.

15 - En travaillant matriciellement, les questions 15 et 16 deviennent triviales. Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ des bases de F et$H$, et soit $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$. Les matrices U et V de u et v dans la base $\mathcal{B}$ sont de la forme :

$$U = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix},\ V = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ 0 & N_3 \end{pmatrix}$$

où M_1 et N_1 sont carrées de taille $\dim(F)$.

On en déduit :

$$\begin{cases} \mathrm{Mat}(p_H u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix} \\ \\ \mathrm{Mat}(p_H u p_H, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

donc $p_H u = p_H u p_H$ (et de même $p_H v = p_H v p_H$).

16 - Comme u et v commutent, U et V commutent, i.e.

$$\begin{pmatrix} M_1 N_1 & M_1 N_2 + M_2 N_3 \\ 0 & M_3 N_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 M_1 & N_1 M_2 + N_2 M_3 \\ 0 & N_3 M_3 \end{pmatrix}$$

On en déduit que les matrices M_3 et N_3 commutent, et donc que $p_H u p_H$ et $p_H v p_H$ commutent, ainsi que $p_H u_H$ et $p_H v_H$ (puisque M_3 et N_3 sont les matrices de $p_H u_H$ et $p_H v_H$ dans la base $\mathcal{B}_2$.

17 - L'énoncé doit être compris sous la forme "démontrer le sens direct du théorème dans le cas $p = 1$". Il y a également une maladresse importante : les notions d'algèbres de Lie et de résolubilité sont définies uniquement matriciellement, et il serait pénible de revenir par récurrence à des algèbres de matrices (en restreignant les endomorphismes $\overline{M}$ à un sous-espace stable H, on obtient des endomorphismes et pas des matrices : le retour à des matrices nécessite de fixer une base de H). Nous parlerons donc ici d'algèbres de Lie en un sens à peine plus général : une algèbre de Lie sur un espace vectoriel (complexe) E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ stable par crochet de Lie ($[f, g] = f \circ g - g \circ f$).

Considérons donc la proposition :

$(\mathcal{H}_n)$: si $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie sur un espace vectoriel complexe E de dimension n et si $\mathcal{U}$ est résoluble de longueur 1 (ce qui revient à dire que les éléments de $\mathcal{U}$ commutent deux à deux), les éléments de $\mathcal{U}$ sont simultanément trigonalisables.

- La propriété $\mathcal{H}_1$ est clairement vérifiée, puisque toute matrice de taille 1 est triangulaire.

- Soit $n \geq 2$ et supposons que $\mathcal{H}_{n-1}$ est vérifiée. Considérons alors une algèbre de Lie résoluble de longueur 1 d'un espace vectoriel complexe E de dimension n. D'après la question 14, il existe un vecteur propre e_1 commun à tous les éléments de $\mathcal{U}$. Notons F la droite engendrée par e_1 (F est stable par tous les éléments de $\mathcal{U}$) et choisissons un hyperplan H supplémentaire de F. Notons alors $\mathcal{U}'$ l'ensemble des $p_H u_H$ pour $u \in \mathcal{U}$. D'après la question 16, les éléments de $\mathcal{U}'$ commutent deux à deux : on en déduit que $\mathcal{U}'$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur 1 de l'espace H. Par hypothèse de récurrence, il existe un base $\mathcal{B}_2 = (e_2, \ldots, e_n)$ de H telle que la matrice de $p_H u_H$ dans $\mathcal{B}_2$ soit triangulaire supérieure pour tout $u \in \mathcal{U}$. La famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est alors une base de E qui trigonalise simultanément tous les éléments de $\mathcal{U}$.

Le sens direct du théorème est donc ainsi démontré quand $p = 1$.

18 - Comme $\mathcal{U}_1$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur $p-1$, il existe une base qui trigonalise (supérieurement) tous les éléments de $\mathcal{U}_1$: le premier vecteur de cette base est donc un vecteur propre commun à tous les endomorphismes $\overline{M}$ pour $M \in \mathcal{U}_1$.

19 - Notons $\mathcal{G}$ l'ensemble générateur de E. Par définition, $\mathcal{G}$ est stable par tous les éléments de $\overline{\mathcal{U}}$, donc E l'est également.

D'autre part, le théorème 1 permet d'affirmer que si $A \in \mathcal{U}$, AX est soit nul, soit un vecteur propre commun à tous les éléments de $\overline{\mathcal{U}_1}$. Par récurrence sur k, on en déduit que les éléments non nuls de $\mathcal{G}$ sont des vecteurs propres communs à tous les éléments de $\overline{\mathcal{U}_1}$. Par linéarité, cette propriété s'étend à E : les éléments non nuls de E sont tous vecteurs propres communs à tous les éléments de $\overline{\mathcal{U}_1}$.

20 - Notons f l'endomorphisme $\overline{[M, M']}_E$. Comme $[M, M'] \in \mathcal{U}_1$, pour tout $y \in E \setminus \{0\}$, il existe $\lambda(y) \in \mathbb{C}$ tel que $f(y) = \lambda(y)\, y$. Si y_1 et y_2 sont deux vecteurs indépendants de E, alors :

$$\lambda(y_1 + y_2)y_1 + \lambda(y_1 + y_2)y_2 = \lambda(y_1 + y_2)\,(y_1 + y_2) = f(y_1 + y_2) = f(y_1) + f(y_2) = \lambda(y_1)y_1 + \lambda(y_2)y_2$$

et donc $\lambda(y_1) = \lambda(y_1 + y_2) = \lambda(y_2)$.

Si maintenant y_1 et y_2 sont deux vecteurs non nuls liés de E, on peut écrire $y_2 = \alpha y_1$ (avec α non nul) et

$$\lambda(y_2)\alpha\, y_1 = \lambda(y_2)\, y_2 = f(y_2) = \alpha\, f(y_1) = \alpha\lambda(y_1)\, y_1$$

et donc $\lambda(y_1) = \lambda(y_2)$. En notant λ la valeur commune $\lambda(y)$, f est l'homothétie de rapport λ.

Enfin, comme E est stable par $\overline{M}$ et $\overline{M'}$, on peut écrire :

$$\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(\overline{M}_E \circ \overline{M'}_E - \overline{M'}_E \circ \overline{M}_E) = 0.$$

21 - Comme la trace de f est égale à $\lambda \dim(E)$ et que E est de dimension non nulle, $\lambda = 0$: ceci prouve que les éléments de $\mathcal{U}' = \{\overline{M}_E,\ M \in \mathcal{U}\}$ commutent deux à deux. Comme cette famille est clairement une algèbre de Lie de $\mathcal{L}(E)$, c'est une algèbre de Lie résoluble de longueur 1 de E. D'après la question 17, il existe donc une base de E qui trigonalise tous les endomorphismes $\overline{M}_E$ pour $U \in \mathcal{U}$.