MINES 2 MP 2022

1 Questions préliminaires

1. Le produit matriciel sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est continu car bilinéaire sur un espace de dimension finie, de plus A commute avec B donc avec tout polynôme en B, on a donc :
$$Ae^B = A\lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{B^k}{k!}\right) = \lim_{p\to+\infty}\left(A\sum_{k=0}^{p}\frac{B^k}{k!}\right) = \lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{B^k}{k!}A\right)$$
$$= \lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{B^k}{k!}\right)A = e^BA.$$

2. On a $f_A(0) = \exp(0_n) = I_n$ et, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f_A'(t) = Af_A(t)$.
Par ailleurs $g(0) = I_n$ et g est dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations usuelles avec, pour tout $t\in\mathbb{R}$: $g'(t) = (A+B)e^{t(A+B)}e^{-tB} - e^{t(A+B)}Be^{-tB}$.
La question précédente assure que, puisque B et $A+B$ commutent alors B commute avec $e^{t(A+B)}$ pour tout $t\in\mathbb{R}$ et donc :
$\forall t\in\mathbb{R}, g'(t) = (A+B)e^{t(A+B)}e^{-tB} - Be^{t(A+B)}e^{-tB} = Ag(t)$.
Donc f_A et g vérifient le même problème de Cauchy $\begin{cases} y'(t) = Ay(t) \\ y'(0) = I_n \end{cases}$ (où $y\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$.
Ce qui assure que f et g sont égales, i.e. : $\forall t\in\mathbb{R}, e^{t(A+B)}e^{-tB} = e^{tA}$.
En multipliant par e^{tB} à droite on obtient la relation (1).
(On rappelle que pour toute matrice $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, e^M est inversible d'inverse e^{-M}).

3. En dérivant une première fois on obtient, pour tout $t\in\mathbb{R}$:
$(A+B)e^{t(A+B)} = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}e^{tB}B$.
En dérivant une seconde fois on obtient, pour tout $t\in\mathbb{R}$:
$(A+B)^2e^{t(A+B)} = A^2e^{tA}e^{tB} + Ae^{tA}e^{tB}B + Ae^{tA}e^{tB}B + e^{tA}e^{tB}B^2$.
En appliquant en $t=0$ on a donc $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$ ce qui donne en développant $BA = AB$.

4. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, par continuité de la norme $\left\|e^A\right\| = \lim\limits_{p\to+\infty}\left(\left\|\sum_{k=0}^{p}\frac{A^k}{k!}\right\|\right)$.
Or, pour tout $p\in\mathbb{N}$, $\left\|\sum_{k=0}^{p}\frac{A^k}{k!}\right\| \le \sum_{k=0}^{p}\frac{\left\|A^k\right\|}{k!} \le \sum_{k=0}^{p}\frac{\|A\|^k}{k!} \le e^{\|A\|}$.
Donc par passage à la limite $\left\|e^A\right\| \le e^{\|A\|}$.

5. On considère A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on la trigonalise, on pose donc $T\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure semblable à A. On sait alors (cf. énoncé) que e^A et e^T sont semblables donc ont même déterminant.
De plus en notant $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ les coefficients diagonaux de T (i.e. les valeurs propres de A comptées avec multiplicité), alors pour tout $k\in\mathbb{N}$, T^k est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $\lambda_1^k,\dots,\lambda_n^k$ donc e^T est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $e^{\lambda_1},\dots,e^{\lambda_n}$ ce qui assure que :
$$\det(e^A) = \det(e^T) = \prod_{k=1}^{n}e^{\lambda_k} = e^{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k} = e^{\mathrm{tr}(T)} = e^{\mathrm{tr}(A)}.$$

2 Formule de Trotter-Kato

6. C'est une application directe de la question 4, en effet, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:
$\|X_k\| \leq \left\|\exp\left(\frac{A}{k}\right)\right\| \left\|\exp\left(\frac{B}{k}\right)\right\| \leq \exp\left(\left\|\frac{A}{k}\right\|\right) \exp\left(\left\|\frac{B}{k}\right\|\right) = \exp\left(\frac{\|A\| + \|B\|}{k}\right)$.
$\|Y_k\| = \left\|\exp\left(\frac{A+B}{k}\right)\right\| \leq \exp\left(\frac{\|A+B\|}{k}\right) \leq \exp\left(\frac{\|A\| + \|B\|}{k}\right)$.
7. h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$h'(t) = A\mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tB} + \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tB}B - (A+B)\mathrm{e}^{t(A+B)}$;
Notamment $h(0) = 0$ et $h'(0) = 0$, la formule de Taylor-Young assure alors que, pour t au voisinage de 0 :
$h(t) = h(0) + th'(0) + \frac{t^2}{2}h''(0) + \underset{t\to 0}{o}(t^2) = \frac{t^2}{2}h''(0) + \underset{t\to 0}{o}(t^2) = \underset{t\to 0}{O}(t^2)$.
(Remarque : on peut préciser que $h''(0) = AB - BA$ mais ce n'est pas utile pour la question posée).
On en déduit que $h\left(\frac{1}{k}\right) = \underset{k\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ i.e. $X_k - Y_k = \underset{k\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$.
8. Soit $k \in \mathbb{N}^*$,alors :
$\sum_{i=0}^{k-1} X_k^i(X_k - Y_k)Y_k^{k-i-1} = \sum_{i=0}^{k-1} X_k^{i+1}Y_k^{k-i-1} - \sum_{i=0}^{k-1} X_k^iY_k^{k-i} = \sum_{i=1}^{k} X_k^iY_k^{k-i} - \sum_{i=0}^{k-1} X_k^iY_k^{k-i}$
$= X_k^k - Y_k^k$.

Une matrice commute avec toutes ses puissances ce qui assure que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(\mathrm{e}^M)^k = \mathrm{e}^{kM}$; notamment, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $Y_k^k = \mathrm{e}^{A+B}$.
Par ailleurs, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:
$\left\|\sum_{i=0}^{k-1} X_k^i(X_k - Y_k)Y_k^{k-i-1}\right\| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \|X_k\|^i \|X_k - Y_k\| \|Y_k\|^{k-i-1}$
$\leq \|X_k - Y_k\| \sum_{i=0}^{k-1} \exp\left(\frac{\|A\| + \|B\|}{k}\right)^i \exp\left(\frac{\|A\| + \|B\|}{k}\right)^{k-i-1}$
$\leq \|X_k - Y_k\| \sum_{i=0}^{k-1} \exp\left(\frac{\|A\| + \|B\|}{k}\right)^{k-1} \leq k\|X_k - Y_k\| \exp\left((k-1)\frac{\|A\| + \|B\|}{k}\right)$
$\leq k\|X_k - Y_k\| \exp(\|A\| + \|B\|) = \underset{k\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{k}\right)$.
Cela assure $\lim_{k\to+\infty}\left(X_k^k - Y_k^k\right) = 0$ i.e. $\lim_{k\to+\infty}\left(X_k^k\right) = \mathrm{e}^{A+B}$ ce qui est bien la relation (2).

3 Vers les algèbres de Lie

9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$:
   $A \in \mathcal{A}_G \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \det(\mathrm{e}^{tA}) = 1 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(tA)} = 1 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, t\mathrm{tr}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{tr}(A) = 0.$
   $\mathcal{A}_G$ est l'hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé par les matrices de trace nulle.
10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour $G = \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$:
    $A \in \mathcal{A}_G \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{tA}(\mathrm{e}^{tA})^T = I_n$.
    Or, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a par passage à la limite : $(\mathrm{e}^{M})^T = \mathrm{e}^{M^T}$ donc :
    $A \in \mathcal{A}_G \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tA^T} = I_n \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{tA^T} = \mathrm{e}^{-tA}$.
    On procède maintenant par implications réciproques :

    i. Si $A \in \mathcal{A}_G$ on a $\forall t \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{tA^T} = \mathrm{e}^{-tA}$ donc en dérivant : $\forall t \in \mathbb{R}, A^T\mathrm{e}^{tA^T} = -A\mathrm{e}^{-tA}$ et en appliquant cette relation en 0 : $A^T = -A$.

    ii. Si A est antisymétrique alors $A^T = -A$ donc $\forall t \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{tA^T} = \mathrm{e}^{-tA}$ et donc $A \in \mathcal{A}_G$.

    $\mathcal{A}_G$ est bien l'ensemble des matrices antisymétriques.
11. $\mathcal{A}_G$ est non vide car G contient I_n donc $\mathcal{A}_G$ contient la matrice nulle.
    La stabilité de $\mathcal{A}_G$ par produit par un scalaire est immédiate.
    Il reste à vérifier la stabilité de $\mathcal{A}_G$ par somme.
    Soit donc A et B dans $\mathcal{A}_G$, montrons que $A + B \in \mathcal{A}_G$.
    Soit $t \in \mathbb{R}$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ par stabilité de G par produit on a :
    $\left(\exp\left(\frac{tA}{k}\right)\exp\left(\frac{tB}{k}\right)\right)^k \in G$
    Or d'après (2) : $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(\left(\exp\left(\frac{tA}{k}\right)\exp\left(\frac{tB}{k}\right)\right)^k\right) = \exp(t(A+B))$.
    Le fait que G soit fermé assure donc que $\exp(t(A+B)) \in G$.
    On a bien vérifié que $A + B \in \mathcal{A}_G$.
    En conclusion, $\mathcal{A}_G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
12. Soit $t \in \mathbb{R}$, les rappels de l'énoncé permettent d'écrire, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:
    $\mathrm{e}^{\alpha u(t)} = \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{\alpha B}\mathrm{e}^{-tA}$ où par hypothèses, e^{tA}, $\mathrm{e}^{\alpha B}$ et e^{-tA} sont dans G donc $\mathrm{e}^{\alpha u(t)}$ est dans G i.e. $u(t)$ est dans $\mathcal{A}_G$.
13. u est à valeurs dans $\mathcal{A}_G$ et est dérivable sur $\mathbb{R}$.
    Pour $a \in \mathbb{R}$, $u'(a) = \lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}(u(a+t) - u(a))\right)$ donc par stabilité de $\mathcal{A}_G$ par combinaison linéaire et passage à la limite ($\mathcal{A}_G$ est fermé en tant que sous-espace vectoriel d'un espace de dimension finie), on en déduit que u' est également à valeurs dans $\mathcal{A}_G$.
    Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u'(t) = A\mathrm{e}^{tA}B\mathrm{e}^{-tA} - \mathrm{e}^{tA}BA\mathrm{e}^{-tA}$ donc $u'(0) = AB - BA$ ce qui assure que $AB - BA \in \mathcal{A}_G$.
14. Soit $A \in \mathcal{A}_G$, on a $A = f'_A(0)$ où f_A est à valeurs dans G et $f_A(0) = I_n$ donc $A \in \tau_{I_n}(G)$.
    On a bien $\mathcal{A}_G \subset \tau_{I_n}(G)$
15. On considère M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on la trigonalise, on pose donc $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure semblable à M et P inversible telle que $P^{-1}MP = T$.
    On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de T (i.e. les valeurs propres de M comptées avec multiplicité).

Soit $t \in \mathbb{R}$ on a $P^{-1}(I_n + tM)P = I_n + tT$, donc :

$\det(I_n + tM) = \det(I_n + tT) = \prod_{k=1}^{n}(1 + t\lambda_k) = 1 + t\sum_{k=1}^{n}\lambda_k + \underset{t\to 0}{O}(t^2) = 1 + t\mathrm{tr}(M) + \underset{t\to 0}{O}(t^2)$.

Ce qui assure que δ_M est dérivable en 0 et $\delta'_M(0) = \mathrm{tr}(M)$.

16. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puisque det est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on en déduit avec les notations de la question précédente et en posant $\phi : t \mapsto I_n + tM$.
$\forall t \in \mathbb{R}$, $\delta_M(t) = \det \circ \phi(t)$ donc $\delta'_M(t) = \mathrm{d}(det)(\phi(t))(\phi'(t))$.
Notamment $\delta'_M(0) = \mathrm{d}(det)(\phi(0))(\phi'(0)) = \mathrm{d}(det)(I_n)(M)$.
Et donc $\mathrm{d}(det)(I_n)(M) = \delta'_M(0) = \mathrm{tr}(M)$.
Ceci étant valide pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a bien $\mathrm{d}(det)(I_n) = \mathrm{tr}$.

17. Il nous faut dans chaque cas démontrer l'inclusion $\tau_{I_n}(G) \subset \mathcal{A}_G$.

i. Si $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{A}_G$ est l'hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé par les matrices de trace nulle.
On a $G = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}$.
Soit $A \in \tau_{I_n}(G)$, il existe $\gamma : t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\mapsto \gamma(t) \in G$ dérivable en 0 telle que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = M$.
Or, pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\det(\gamma(t)) = 1$ donc en dérivant en 0 : $\mathrm{d}(\det)(\gamma(0))(\gamma'(0)) = 0$ i.e. $\mathrm{d}(\det)(I_n)(M) = 0$ i.e. $\mathrm{tr}(M) = 0$ i.e. $M \in \mathcal{A}_G$.
On a bien $\tau_{I_n}(G) \subset \mathcal{A}_G$ donc $\tau_{I_n}(G) = \mathcal{A}_G$.
Remarque : C'est en fait un résultat de cours : en introduisant la structure euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *on constate que* $\mathrm{grad}(\det)(I_n) = I_n$ *et que* $\mathcal{A}_G = I_n^{\perp}$. *Puisque* G *a pour équation* $\det(M) = 1$ *(ligne de niveau de* det*) on sait que tout vecteur tangent à* G *en* I_n *est orthogonal au gradient de* det *en* I_n*, on retrouve ainsi le résultat voulu.*

ii. Si $G = \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{A}_G = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
Soit $A \in \tau_{I_n}(G)$, il existe $\gamma : t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\mapsto \gamma(t) \in G$ dérivable en 0 telle que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = M$.
Or, pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\gamma(t)\gamma(t)^T = I_n$ donc en dérivant en 0 (et en utilisant la linéarité de la transposition) : $\gamma'(0)\gamma(0)^T + \gamma(0)\gamma'(0)^T = 0$ i.e. $M + M^T = 0$ i.e. $M \in \mathcal{A}_G$.
On a bien $\tau_{I_n}(G) \subset \mathcal{A}_G$ donc $\tau_{I_n}(G) = \mathcal{A}_G$.

4 Comportement asymptotique

18. **i.** Obtention de la matrice :

- Si A est diagonalisable elle est semblable à T avec $a = 0$.
- Si A n'est pas diagonalisable on considère $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ qui lui est canoniquement associée.
  On a $\dim(\ker(u - \alpha Id)) = \dim(\ker(u - \beta Id)) = 1$.
  De plus $\chi_u = (X - \alpha)(X - \beta)^2$ annule u donc par lemme de décomposition des noyaux $\ker(u - \alpha Id) \oplus \ker(u - \beta Id)^2 = \mathbb{C}^3$.
  Cela assure $\dim(\ker(u - \beta Id)^2) = 2$.
  On pose $e_3 \in \ker(u - \beta Id)^2 \setminus \ker(u - \beta Id)$ (qui existe d'après ce qui précède).
  On pose $e_2 = (u - \beta Id)(e_3)$, e_2 engendre $\ker(u - \beta Id)$ et (e_2, e_3) est donc libre dans $\ker(u - \beta Id)^2$ donc en est une base.

On pose alors $e_1 \in \ker(u - \alpha Id) \setminus \{0\}$.

(e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{C}^3$ dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$, ce qui assure le résultat voulu avec $a = 1$.

ii. Calcul de e^{tT}.

On montre alors par une récurrence simple que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \beta^n & na\beta^{n-1} \\ 0 & 0 & \beta^n \end{pmatrix}$.

On en déduit que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^{tT} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\alpha)^n}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\beta)^n}{n!} & \displaystyle a\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n\beta^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 0 & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\beta)^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{t\beta} & at\mathrm{e}^{t\beta} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{t\beta} \end{pmatrix}.$$

iii. Condition nécessaire et suffisante pour que $\lim_{t \to +\infty} \left(\mathrm{e}^{tA}\right) = 0_3$:

On peut poser $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = T$.
On a alors,pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P^{-1}\mathrm{e}^{tA}P = P^{-1}\mathrm{e}^{tT}P$.
Par continuité du produit matriciel on en déduit que :
$\lim_{t \to +\infty} \left(\mathrm{e}^{tA}\right) = 0_3 \Leftrightarrow \lim_{t \to +\infty} \left(\mathrm{e}^{tT}\right) = 0_3$.
Or pour un nombre complexe z donné on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\left|\mathrm{e}^{tz}\right| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)t}$ et donc $\lim_{t \to +\infty} \left(\mathrm{e}^{tz}\right) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) < 0$; de plus si $\mathrm{Re}(z) < 0$ on a aussi (croissances comparées) : $\lim_{t \to +\infty} \left(t\mathrm{e}^{tz}\right) = 0$.
Le calcul précédent de e^{tT} assure donc que :
$\lim_{t \to +\infty} \left(\mathrm{e}^{tT}\right) = 0_3 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(\alpha) < 0$ et $\mathrm{Re}(\beta) < 0$.
En conclusion : $\lim_{t \to +\infty} \left(\mathrm{e}^{tA}\right) = 0_3 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(\alpha) < 0$ et $\mathrm{Re}(\beta) < 0$.

19. Supposons $\lim_{t \to +\infty} \left(\mathrm{e}^{tA}\right) = 0_n$.
Soit λ une valeur propre de A telle que $\mathrm{Re}(\lambda) = \alpha$ et soit Z un vecteur propre associé.
On a $AZ = \lambda Z$ ce qui assure que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{tA}Z = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n Z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \lambda^n Z = \mathrm{e}^{t\lambda}Z$.
Puisque $\lim_{t \to +\infty} \left(\mathrm{e}^{tA}\right) = 0_n$ par continuité du produit matriciel on a $\lim_{t \to +\infty} \left(\mathrm{e}^{tA}Z\right) = 0$ et donc $(Z \neq 0)$ $\lim_{t \to +\infty} \left(\mathrm{e}^{t\lambda}\right) = 0$ ce qui assure (cf 18.) que $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ i.e. $\alpha < 0$.

20. On a $\chi_A = \displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$ qui annule A par théorème de Cayley-Hamilton et les polynômes $(X - \lambda)^{m_\lambda}$ sont premiers entre eux deux-à-deux donc par lemme de décomposition des noyaux on a : $\mathbb{C}^n = \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \ker\left((A - \lambda I_n)^{m_\lambda}\right) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} F_\lambda$.

21. Soit λ une valeur propre de A, F_λ est stable par u (noyau d'un polynôme en u), notons u_λ l'endomorphisme de F_λ induit par u.

On a $(u_\lambda - \lambda Id_{F_\lambda})^{m_\lambda} = 0$, posons alors $n_\lambda = u_\lambda - \lambda Id_{F_\lambda}$, c'est un endomorphisme nilpotent de F_λ et on a $u_\lambda = \lambda Id_{F_\lambda} + n_\lambda$.

Puisque $\mathbb{C}^n = \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} F_\lambda$ on peut définir des endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ par leurs restrictions aux F_λ ; on définit donc d et n dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ par :

pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, d et n induisent les endomorphismes λId_{F_λ} et n_λ sur F_λ.

Puisque, pour pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, λId_{F_λ} et n_λ commutent on en déduit que d et n commutent.

De plus, u et $d+n$ coïncident sur tous les F_λ donc ils sont égaux.

Enfin en posant D et N les matrices canoniquement associées à d et n on a bien toutes les relations voulues à l'exception de la dernière qui n'est pas immédiate (on sait $\chi_A = \chi_{D+N}$ mais pas tout-de-suite $\chi_A = \chi_D$).

On vérifie donc cette relation $\chi_A = \chi_D$.

Puisque tous les F_λ sont stables stable par u on a par déterminant par blocs :

$\chi_A = \chi_u = \displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (\chi_{u_\lambda}) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (\chi_{\lambda Id_{F_\lambda} + n_\lambda})$.

Or , pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, n_λ se trigonalise en une matrice triangulaire avec des 0 sur la diagonale donc $\chi_{\lambda Id_{F_\lambda} + n_\lambda} = \chi_{\lambda Id_{F_\lambda}}$.

Ainsi $\chi_A = \displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (\chi_{\lambda Id_{F_\lambda}}) = \chi_d = \chi_D$.

22. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de D, i.e. les valeurs propres de A comptées avec multiplicité.

    Par ailleurs notons p tel que, pour tout $k \geq p$, $N^k = 0_n$ (p existe car N est nilpotente).

    D et N commutent donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

    $\mathrm{e}^{t(D+N)} = \mathrm{e}^{tD}\mathrm{e}^{tN} = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n t}) \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{t^k}{k!} N^k$.

    La fonction $g : t \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{t^k}{k!} N^k$ est une fonction à valeur matricielle dont les coefficients sont des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à p, on a donc, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, g_{i,j}(t) = \underset{t \to +\infty}{O}(t^p)$.

    De plus, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{Re}(\lambda_k) \leq \alpha$ donc $\mathrm{e}^{\lambda_k t} = \underset{t \to +\infty}{O}(\mathrm{e}^{\alpha t})$.

    La fonction $h : t \mapsto \mathrm{e}^{t(D+N)}$ est donc une fonction à valeur matricielle dont les coefficients vérifient, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, h_{i,j}(t) = \underset{t \to +\infty}{O}(\mathrm{e}^{\alpha t} t^p)$.

    Enfin, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{tA} = P\mathrm{e}^{t(D+N)}P^{-1}$ donc les coefficients de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{tA}$ sont des combinaisons linéaires de ceux de h ce qui assure que, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $v_{i,j}(t) = \underset{t \to +\infty}{O}(\mathrm{e}^{\alpha t} t^p)$.

23. En supposant $\alpha < 0$, la question précédente assure que, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} (v_{i,j}(t)) = 0$, on a donc bien $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} (f_A(t)) = 0_n$.

    La réciproque de la propriété établie à la question 19 est vraie.

24. Soit $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$.

    On procède par implications réciproques.

i. Si $X=0$ on a évidemment $\lim_{t\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{tA}X\right)=0$.

ii. Supposons que $\lim_{t\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{tA}X\right)=0$.

Puisque, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{tA}=P\mathrm{e}^{t(D+N)}P^{-1}$ on en déduit en posant $Y=P^{-1}X$ que
$\lim_{t\to+\infty}\left(P\mathrm{e}^{t(D+N)}P^{-1}X\right)=0$ i.e. $\lim_{t\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{t(D+N)}Y\right)=0$.

En reprenant les notations introduites à la question 22 et en notant $Y=(y_1,\ldots,y_n)$ on a, pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^{t(D+N)}Y=\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1 t},\ldots,\mathrm{e}^{\lambda_n t})\sum_{k=0}^{p}\frac{t^k}{k!}N^kY$$

On rappelle que l'on note $g:t\mapsto\sum_{k=0}^{p}\frac{t^k}{k!}N^k$, qui est une fonction à valeur matricielle dont les coefficients sont les fonctions polynomiales notées $g_{(i,j)}$; puisque $N^0=I_n$, le coefficient de degré 0 de chaque fonction $g_{(i,j)}$ est $c_{i,j}=\begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{si } i\neq j\end{cases}$.

Soit $i\in[\![1,n]\!]$ le i–ième coefficient de $\mathrm{e}^{t(D+N)}Y$ est $(\mathrm{e}^{t(D+N)}Y)_i=\mathrm{e}^{\lambda_i t}\sum_{j=1}^{n}g_{i,j}(t)y_j$.

On a donc $\lim_{t\to+\infty}\left(e^{\lambda_i t}\sum_{j=1}^{n}g_{i,j}(t)y_j\right)=0$.

Or $\mathrm{Re}(\lambda_i)\geq 0$ donc, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $\left|e^{\lambda_i t}\right|\geq 1$.

On en déduit que $\lim_{t\to+\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}g_{i,j}(t)y_j\right)=0$, or la seule fonction polynomiale de limite nulle en $+\infty$ est la fonction nulle on en déduit que, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\sum_{j=1}^{n}g_{i,j}(t)y_j=0$,
notamment pour $t=0$ on obtient $y_i=0$.

On a donc $Y=0$ or $X=PY$ donc $X=0$ ce qui achève la démonstration.

25. L'égalité $E=E_s\oplus E_i\oplus E_n$ est assurée par lemme de décomposition des noyaux.
E_s est stable par u, notons u_s l'endomorphisme induit par u sur E_s.
De même $E_i\oplus E_n$ est stable par u, notons u_{in} l'endomorphisme induit par u sur $E_i\oplus E_n$.
Soit $X\in E$, il se décompose conne $X=X_s+X_{in}$ où $X_s\in E_s$ et $X_{in}\in E_i\oplus E_n$.
Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $A^kX=u^k(X)=u_s^k(X_s)+u_{in}^k(X_{in})$.
Et ainsi, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{tA}X=\mathrm{e}^{tu_s}(X_s)+\mathrm{e}^{tu_{in}}(X_{in})$.
Or u_s n'admet que des valeurs propres de partie réelle strictement négative, on sait donc par la question 23 que $\lim_{t\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{tu_s}(X_s)\right)=0$.
Par ailleurs u_{in} n'admet que des valeurs propres de partie réelle positive ou nulle, on sait donc par la question 24 que $\lim_{t\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{tu_{in}}(X_{in})\right)=0\Leftrightarrow X_{in}=0$.
On a donc : $\lim_{t\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{tA}X\right)=0\Leftrightarrow X_{in}=0\Leftrightarrow X\in E_s$.
On a bien justifié l'égalité $E_s=\left\{X\in E \mid \lim_{t\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{tA}X\right)=0\right\}$.

26. On reprend le travail précédent mais en décomposant « en trois ».

E_s, E_i et E_n sont stables par u, notons u_s, u_i et u_n les endomorphismes induits par u sur E_s, E_i et E_n.

Soit $X \in E$, il se décompose comme $X = X_s + X_i + X_n$ où $X_s \in E_s$,$X_i \in E_i$. et $X_n \in E_n$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k X = u^k(X) = u_s^k(X_s) + u_i^k(X_i) + u_n^k(X_n)$.

Et ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{tA} X = \mathrm{e}^{tu_s}(X_s) + \mathrm{e}^{tu_i}(X_i) + \mathrm{e}^{tu_n}(X_n)$.

En reprenant le travail fait à la question 24 appliqué à u_i dont toutes les valeurs propres sont de partie réelle strictement positive on constate que si $X_i \neq 0$ alors il existe au moins une coordonnée de $\mathrm{e}^{tu_i}(X_i)$ équivalente en $+\infty$ à une fonction de la forme $\mathrm{e}^{\lambda t} P(t)$ avec P polynôme non nul et $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ ce qui assure que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $t^p = \underset{t \to +\infty}{o}(\mathrm{e}^{tu_i}(X_i))$.

De même, si $X_s \neq 0$ on a, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $t^p = \underset{t \to -\infty}{o}(\mathrm{e}^{tu_s}(X_s))$.

On note maintenant $G = \left\{X \in E \mid \exists C \in \mathbb{R}_+^*, \exists p \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \left\|\mathrm{e}^{tA} X\right\|_E \leq C(1+|t|)^p\right\}$ et on montre que $F_n = G$ par inclusions réciproques.

i. Montrons que $G \subset E_n$.

Soit $X \in G$ avec les notations correspondantes à la définition de G on a $\mathrm{e}^{tA} X = \underset{t \to +\infty}{O}(t^p)$ et $\mathrm{e}^{tA} X = \underset{t \to -\infty}{O}(t^p)$.

En décomposant $X \in E$ comme $X = X_s + X_i + X_n$ où $X_s \in E_s$,$X_i \in E_i$. et $X_n \in E_n$, le travail précédent assure que $X_i = 0$ et $X_n = 0$, i.e. $X \in E_n$.

ii. Montrons que $E_n \subset G$.

Soit $X \in E_n$ avec les notations précédentes on a $X = X_n$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{tA} X = \mathrm{e}^{tu_n}(X_n)$.

Là encore on reprend le 24 qu'on applique à u_n dont toutes les valeurs propres sont de partie réelle nulle.

On constate alors que toutes les coordonnées de $\mathrm{e}^{tu_n}(X_n)$ sont des combinaisons linéaires de termes de la forme $\mathrm{e}^{\lambda t} P(t)$ où P est une fonction polynomiale et $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ donc $\left|\mathrm{e}^{\lambda t} P(t)\right| = |P(t)|$.

On en déduit donc qu'il existe un entier p (correspondant au plus grand degré des fonctions polynomiales apparaissant dans les coordonnées de $\mathrm{e}^{tu_n}(X_n)$) tel que
$\left\|\mathrm{e}^{tA} X\right\|_E = \underset{|t| \to +\infty}{O}(t^p)$.

Cela assure donc que $\dfrac{\left\|\mathrm{e}^{tA} X\right\|_E}{1+|t|^p}$ est borné pour $t \in \mathbb{R}$ et donc que $X \in G$.