

Préparation aux Concours (Mines)

Invariants de Similitude

Notations

- n désigne un entier naturel non nul.
- \mathbf{K} désigne \mathbf{R} ou \mathbf{C} .
- $M_n(\mathbf{K})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n et à coefficients dans \mathbf{K} et, pour une matrice M de $M_n(\mathbf{K})$, on note χ_M son polynôme caractéristique.
- $\mathbf{K}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans \mathbf{K} , $\mathbf{K}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n .
- $\text{Re}^- = \{z \in \mathbf{C} / \text{Re}(z) < 0\}$.
- On désigne par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de \mathbf{R}^n et $\|\cdot\|$ sa norme associée :

$$\langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \& \quad \|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

- On confondra abusivement, pour le calcul matriciel, le vecteur $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de \mathbf{K}^n

avec la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de ses coordonnées dans la base canonique de \mathbf{K}^n .

- Pour $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de \mathbf{C}^n , on notera son conjugué $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$, sa partie réelle $\text{Re}(X) = \frac{X + \bar{X}}{2}$ et sa partie imaginaire $\text{Im}(X) = \frac{X - \bar{X}}{2i}$.
- Si $M \in M_n(\mathbf{R})$, et $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} , l'endomorphisme de \mathbf{K}^n canoniquement associé à M est $\begin{matrix} \mathbf{K}^n & \rightarrow & \mathbf{K}^n \\ X & \mapsto & MX. \end{matrix}$

Rappels

- (1) Deux matrices A et B de $M_n(\mathbf{K})$ sont semblables dans $M_n(\mathbf{K})$ si il existe une matrice P de $M_n(\mathbf{K})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$. Deux matrices A et B de $M_n(\mathbf{R})$ sont semblables dans $M_n(\mathbf{C})$ si il existe une matrice P de $M_n(\mathbf{C})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$.
- (2) Soient R et S deux polynômes de $\mathbf{K}[X]$. R est un diviseur de S s'il existe un polynôme Q de $\mathbf{K}[X]$ tel que $S = QR$. Les polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

Objectifs

- Il s'agit d'établir pour un système différentiel linéaire d'ordre 1, une équivalence entre des propriétés qualitatives des solutions et des conditions portant sur la nature de la matrice associée à ce système et de son polynôme caractéristique.
- La partie 1 concerne l'étude de propriétés de matrices semi-simples.
- La partie 2 propose de trouver une caractérisation de matrices diagonalisables de $M_n(\mathbf{C})$.
- La partie 3 est consacrée à l'étude des polynômes de Hurwitz.
- Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes.
- La partie 4, sur l'équivalence annoncée pour les systèmes différentiels, utilise des résultats des parties 1 et 3.

Définition 1. Une matrice de $M_n(\mathbf{R})$ est dite semi-simple si elle est diagonalisable dans $M_n(\mathbf{C})$.

Définition 2. Une matrice M de $M_n(\mathbf{R})$ est dite presque diagonale s'il existe

- i) deux entiers naturels p et q ;
- ii) q réels a_1, a_2, \dots, a_q ;
- iii) q réels non nuls b_1, b_2, \dots, b_i ;
- iv) une matrice D diagonale de $M_p(\mathbf{R})$ tels que $p + 2q = n$ et M est la matrice bloc suivante :

$$M = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & M(a_1, b_1) & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & M(a_2, b_2) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & M(a_q, b_q) \end{pmatrix}$$

où, $\forall j \in \llbracket 1; q \rrbracket : M(a_j, b_j) = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix}$. Si $p = 0$, la matrice D n'est pas présente dans la matrice diagonale par blocs M . De même, si $q = 0$, alors $M = D$.

Soit A la matrice de $M_2(\mathbf{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1 ▷ La matrice A est-elle semi-simple ?

Soit B la matrice de $M_2(\mathbf{R})$ définie par $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

2 ▷ Démontrer que B est semi-simple et en déduire l'existence d'une matrice Q de $M_2(\mathbf{R})$ inversible et de deux réels a et b à déterminer tels que :

$$B = Q \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Indication : on pourra, pour un vecteur propre V de B , introduire les vecteurs $W_1 = \operatorname{Re}(V)$ et $W_2 = \operatorname{Im}(V)$.

Soit M une matrice de $M_2(\mathbf{R})$.

On suppose dans la question 3) seulement que M admet deux valeurs propres complexes $\mu = a + ib$ et $\bar{\mu} = a - ib$ avec $a \in \mathbf{R}$ et $b \in \mathbf{R}^*$.

3 ▷ Démontrer que M est semi-simple et semblable dans $M_2(\mathbf{R})$ à la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

4 ▷ Démontrer que M est semi-simple si, et seulement si, l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- i) M est diagonalisable dans $M_2(\mathbf{R})$;
- ii) χ_M admet deux racines complexes conjuguées de partie imaginaire non nulle.

5 ▷ Soit N une matrice de $M_n(\mathbf{R})$ semblable à une matrice presque diagonale. Démontrer que N est semi-simple.

6 ▷ Soit N une matrice de $M_n(\mathbf{R})$. Donner la forme factorisée de χ_N dans $\mathbf{C}[X]$ en précisant, dans les notations, les racines réelles et les racines complexes conjuguées. En déduire que si N est semi-simple alors elle est semblable dans $M_n(\mathbf{R})$ à une matrice presque diagonale.

2. UNE CARACTÉRISATION DES MATRICES DIAGONALISABLES DE $M_n(\mathbf{C})$

Dans cette partie, E désigne un \mathbf{C} -espace vectoriel de dimension n et u désigne un endomorphisme de E .

On suppose dans les questions 7), 8) et 9) que u est diagonalisable. On note $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u . Soit F un sous-espace vectoriel de E , différent de $\{0_E\}$ et de E .

7 ▷ Démontrer qu'il existe $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $v_k \notin F$ et qu'alors F et la droite vectorielle engendrée par v_k sont en somme directe. On note alors

$$\mathcal{A} = \{H \text{ sous-espace vectoriel de } E \text{ tel que } u(H) \subset H \text{ et } F \cap H = \{0_E\}\} \quad \text{et}$$

$$\mathcal{L} = \{p \in \mathbf{N}^*, \exists H \in \mathcal{A} : p = \dim(H)\}.$$

8 ▷ Démontrer que \mathcal{L} admet un plus grand élément que l'on nommera r .

9 ▷ Démontrer que F admet un supplémentaire G dans E stable par u .

10 ▷ On suppose que tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire dans E stable par u . Démontrer que u est diagonalisable. En déduire une caractérisation des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbf{C})$.

Indication : on pourra raisonner par l'absurde et introduire un sous-espace vectoriel, dont on justifiera l'existence, de dimension $n - 1$ et contenant la somme des sous-espaces propres de u .

3. POLYNÔMES DE HURWITZ

Définition 3. Un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ est dit polynôme de Hurwitz si ses racines dans \mathbf{C} appartiennent à $\text{Re}^- = \{z \in \mathbf{C} / \text{Re}(z) < 0\}$.

Définition 4. Un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ est dit à coefficients strictement positifs s'il est non nul et si, d désignant son degré, $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ où, pour tout $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$, $a_k > 0$.

11 ▷ Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Démontrer que si α est une racine d'un polynôme P de $\mathbf{R}[X]$ à coefficients strictement positifs, alors $\alpha < 0$.

12 ▷ Démontrer que tout diviseur d'un polynôme de Hurwitz est un polynôme de Hurwitz.

13 ▷ Soit P un polynôme de Hurwitz de $\mathbf{R}[X]$ irréductible et à coefficient dominant positif. Démontrer que tous les coefficients de P sont strictement positifs.

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n$. On définit les deux polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ de $\mathbf{C}[X]$ par :

$$P(X) = \prod_{k=1}^n (X - z_k) \quad \text{et} \quad Q(X) = \prod_{(k,l) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2} (X - z_k - z_l).$$

14 ▷ On suppose $n = 2$ et $P \in \mathbf{R}_2[X]$. Si les coefficients de Q sont strictement positifs, P est-il alors un polynôme de Hurwitz ?

15 ▷ Soient A et B deux polynômes de $\mathbf{R}[X]$ dont tous les coefficients sont strictement positifs. Démontrer que les coefficients du produit AB sont également strictement positifs.

16 ▷ Démontrer que si P et Q sont dans $\mathbf{R}[X]$, alors on a l'équivalence : P est un polynôme de Hurwitz si, et seulement si, les coefficients de P et Q sont strictement positifs.

4. SYSTÈME DIFFÉRENTIEL DE MATRICE ASSOCIÉE SEMI-SIMPLE

Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$. On note (S) le système différentiel $(S) X' = MX$, où X est une application de la variable t de \mathbf{R} dans \mathbf{R}^n , dérivable sur \mathbf{R} .

Soit $T \in M_n(\mathbf{R})$. On suppose que M est semblable à T dans $M_n(\mathbf{R})$ et l'on note (S^*) le système différentiel $(S^*) Y' = TY$.

17 ▷ Démontrer que les coordonnées d'une solution X de (S) sont combinaisons linéaires des coordonnées d'une solution Y de (S^*) .

Dans les deux questions suivantes 18) et 19), on suppose $n = 2$, on note alors $X = (x; y)$ où x et y sont deux fonctions dérivables de \mathbf{R} dans \mathbf{R} et l'on pose $z = x + iy$.

On suppose qu'il existe a et b réels tels que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

18 ▷ Démontrer que X est solution de (S) si, et seulement si, z est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à déterminer. En déduire une expression des coordonnées des solutions de (S) en fonction de t .

Résoudre le système $X' = BX$ où B est la matrice de la question 2).

19 ▷ Soit $M \in M_2(\mathbf{R})$ semi-simple. Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur les parties réelles et imaginaires des valeurs propres de M , pour que toute solution de (S) ait chacune de ses coordonnées qui tende vers 0 en $+\infty$.

On reprend le cas général $n \geq 2$ et on considère les assertions suivantes :

A₁ χ_M est un polynôme de Hurwitz ;

A₂ Les solutions de (S) tendent vers $0_{\mathbf{R}^n}$ quand t tend vers $+\infty$;

A₃ Il existe $\alpha > 0$, il existe $k > 0$ tels que pour toute solution Φ de (S) ,

$$\forall t \geq 0 \quad : \quad \|\Phi(t)\| \leq k e^{-\alpha t} \|\Phi(0)\|.$$

Soit $T \in M_n(\mathbf{R})$. On suppose que T vérifie la condition suivante :

$$(C) \quad \exists \beta \in \mathbf{R}_+^*, \forall X \in \mathbf{R}^n : \langle TX, X \rangle \leq -\beta \|X\|^2.$$

20 ▷ Démontrer que **A₃** est vraie avec $k = 1$ pour toute solution Φ de (S^*) .

Indication : on pourra introduire la fonction $t \mapsto e^{2\beta t} \|\Phi(t)\|^2$.

21 ▷ On suppose que $M \in M_n(\mathbf{R})$ est semi-simple. Démontrer que les assertions **A₁**, **A₂** et **A₃** sont équivalentes.

*Indication : on pourra commencer par montrer que **A₃** implique **A₂**.*

FIN DU PROBLÈME