CPGE Dm Ghazi
MP*1 (Rabat)

Prof. MAMOUNI
myismail.net

Préparation Concours

Algèbre linéaire et Réduction

Dans tout le document $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un K-ev

Partie I : Dualité

Forme linéaire : tout app linéaire $\varphi : E \to K$

Dual de E : $E^* = \mathcal{L}(E, K) = \{\varphi : E \to K \text{ linéaire}\}$

hyperplan : H sev de E tq H admet un sev supplémentaire de $\dim = 1$

ie $\exists a \in E$ tq $E = H \oplus Ka$

1. Mq H hyperplan de $E \iff \exists \varphi \in E^*$ tq $\varphi \neq 0$ et $H = \operatorname{Ker} \varphi$
2. Soit H hyperplan et $\varphi, \psi \in E^* \setminus \{0\}$ tq $H = \operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} \psi$

   mq $\exists \lambda \in K$ tq $\psi = \lambda \varphi$
3. on suppose $\dim E = n \geq 2$ finie

   i) Soit $\beta = (e_1 \dots e_n)$ base de E

   mq $\exists! \beta^* = (e_1^* \dots e_n^*)$ base de E^* tq $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$

   ↑ base duale de E

Scanné avec CamScanner

(ii) Mq ds ce cas $\forall x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ avec $x_i = e_i^*(x)$

(iii) En deduire la base duale dans les cas suivant

(a) $\beta = (L_1, \dots, L_n)$ base d'interpolation de Lagrange de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$

(b) $\beta = ((X-a)^k)_{0 \le k \le n}$ base de $\mathbb{R}_n[X]$

(c) $(N_k)_{0 \le k \le n}$ où $N_k = \prod_{i=0}^{k-1} (X-i)$ et $N_0 = 1$

indic : Utiliser $\Delta P(X) = P(X+1) - P(X)$

(4) On suppose encore $\dim E = n \geq 2$ (fini)

(i) Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ libre dans E^* et $\varphi \in E^*$

Mq $\varphi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p) \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}\, \varphi_i \subset \mathrm{Ker}\, \varphi$

indic : thm de la base incomplète

+ Notion de base antiduale

(ii) Mq le resultat ci-dessus est encore valable même si $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est liée

(iii) En deduire que tout sev $F \subset E$ tq $\dim F = p$

$\Leftrightarrow$ F est definie par $n-p$ eq indepdt

Scanné avec CamScanner

(5) On suppose tq $\dim E = n \geq 2$ finie et $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ famille d'elts de E^*

on pose $u : E \to K^p$
$x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x))$

(1) Mq $\dim \operatorname{Ker} u = n - \operatorname{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$

(2) En déduire que

$(\varphi_1 \dots \varphi_p)$ libre $\Leftrightarrow$ u surj

—— gen $\Leftrightarrow$ u inj

—— base $\Leftrightarrow$ u isom

Partie II — Matrice Compagnon

Soit $a_0, \dots, a_{n-1} \in K$ on pose

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & a_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

(1) Mq $\chi_M(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$

(2) Mq $\dim E_\lambda(M) = 1 \quad \forall \lambda \in Sp(M)$

(3) En déduire que M est diagble $\Leftrightarrow$ χ_M scindé à racine simple

Scanné avec CamScanner

(4) On suppose M est diagonalisable

(i) Dire pourquoi M^T est aussi diagble

(ii) Diagonaliser M^T puis M

(5) Application

(i) Dire comment étudier une suite récurrente linéaire d'ordre k

(ii) . . . . . eq diff linéaire d'ordre k

Partie III / Endom Cyclique

on suppose ici $\dim E = n \geq 2$ (finie)

$u \in \mathcal{L}(E)$ est dit cyclique ssi $\exists x_0 \in E$ tq

$\mathcal{B} = (x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ base de E

(1) Mq dans ce cas on a

(i) $M_{\mathcal{B}}(u) = M$ (matrice compagnon)

(ii) $\pi_u = \chi_u$ avec $(id_E, u, \dots, u^{n-1})$ libre

(iii) $C(u) = K(u) = \mathrm{Vect}(id_E, u, \dots, u^{n-1})$

$C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E)$ tq $u \circ v = v \circ u\}$

$K(u) = \{v \in \mathcal{L}(E)$ tq $v = P(u)$ où $P \in K[X]\}$

(iv) $\dim C(u) = n$

Scanné avec CamScanner

② Mq tout end nilpotent d'indice $p=n$ est cyclique

③ Mq tout end tq χ_u est scindé à racine simple est aussi cyclique

Partie IV Lemme de Schur

On suppose ici $\dim E = n \geq 2$ finie et $u \in \mathcal{L}(E)$

① Mq $u = \lambda id_E \iff \{x, u(x)\}$ est liée $\forall x \neq 0_E$

② En deduire que $u \circ v = v \circ u \ \forall v \in \mathcal{L}(E) \iff u = \lambda id_E$

③ Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ tq $Tr(AM) = 0 \quad \forall M \in \mathcal{M}_n(K)$

Mq $A = 0$

④ Soit $\varphi \in \mathcal{M}_n(K)^*$ tq $\varphi(AB) = \varphi(BA)$

ⓐ Mq $\exists A \in \mathcal{M}_n(K)$ tq $\varphi(M) = Tr(A.M) \ \forall M \in \mathcal{M}_n(K)$

ⓘⓘ En deduire $\exists \lambda \in K$ tq $\varphi = \lambda Tr$

⑤ Une application : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$

Mq $Tr(A) = 0 \Rightarrow A \sim B$ tq diagonale de $B = 0$

ie $b_{ii} = 0 \ \forall 1 \leq i \leq n$

indic : Supposer $A \neq \lambda I$, lemme de Schur et recurrence sur n

Scanné avec CamScanner

Partie V — Crochet de Lie

on considère ici E K-ev tq $\dim E = n \geq 2$ (finie)

$\forall u, v \in \mathcal{L}(E)$ on pose $[u,v] = u \circ v - v \circ u$

et $\varphi_u : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$
$v \mapsto [u,v]$

$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ $\quad [A,B] = AB - BA$

et $\varphi_A : \mathcal{M}_n(K) \longrightarrow \mathcal{M}_n(K)$
$B \longmapsto [A,B]$

1) On suppose que A est diagonalisable

i) Justifier l'existence de $(X_1, \dots, X_n)$ base de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$
$(Y_1, \dots, Y_n)$ base de $\mathcal{M}_n(K)$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$
tq $AX_i = \alpha_i X_i$ et $A^T \cdot Y_j = \alpha_j Y_j$
$\forall\, 1 \leq i, j \leq n$

ii) on pose $B_{ij} = X_i \cdot Y_j^T \in \mathcal{M}_n(K)$

a) Mq $\varphi_A(B_{ij}) = (\alpha_i - \alpha_j) B_{ij}$ $\quad \forall 1 \leq i, j \leq n$

b) Mq $(B_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ base de $\mathcal{M}_n(K)$

iii) Conclure que φ_A est diagonalisable

Scanné avec CamScanner

② On s'intéresse ici à la réciproque

$\boxed{\text{On suppose que } \varphi_u \text{ est diagble}}$

on suppose de plus que $\boxed{Sp_K(u) \neq \phi}$

on pose $sp(\varphi_u) = (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n^2}$ et $(V_i)_{1 \leq i \leq n^2}$ base propre de φ_u

on considère $\lambda \in Sp_K(u) \neq \phi$ et $x_0 \in E$ tq $x_0 \neq 0_E$

et $u(x_0) = \lambda x_0$

(i) Vérifier que $\forall 1 \leq i \leq n^2$, $\exists \alpha_i \in K$ tq $u(V_i(x_0)) = \alpha_i V_i(x_0)$

(ii) Mq l'app $\phi : \mathcal{L}(E) \to E$, $V \mapsto V(x_0)$ est lin et surj

indic : thm de la base incomplète

(iii) En déduire que $\exists I \subset [\![1, n^2]\!]$ tq Card $I = n$

et $(V_i(x_0))_{i \in I}$ base de E

(iv) $\boxed{\text{Conclure que } u \text{ est diagble}}$

③ Justifier que $\bigcap_{A \in M_n(K)} \ker \varphi_A = \{\lambda I_n \text{ tq } \lambda \in K\}$

et est de dim ≤ 1

Scanné avec CamScanner

(4) (i) Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

donner les coeff de $\varphi_A(D)$

(ii) On déduire que $\bigcup_{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \mathrm{Im}\, \varphi_A = \mathrm{Ker}\, \mathrm{Tr}$

et que sa dim est égale à $n^2 - 1$

(iii) On déduit que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $\mathrm{Im}\, \varphi_A \subset \mathrm{Im}\, \varphi_B$

ou

$\mathrm{Im}\, \varphi_B \subset \mathrm{Im}\, \varphi_A$

Partie VI | Projecteurs spectraux

On suppose ici $\dim E = n \geq 2$ (finie)

et $u \in \mathcal{L}(E)$ tq $\pi_u(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ scindé dans $\mathbb{K}$

et on pose $E_i = \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \cdot \mathrm{id}_E)^{\alpha_i}$

(1) Justifier que $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$

on pose $p_i = p_{E_i \parallel \bigoplus_{j \neq i} E_j}$

(2) Justifier que $\mathrm{id}_E = \sum_{i=1}^{r} p_i$ et que $u = \sum_{i=1}^{r} u \circ p_i$

(3) Mq $\forall 1 \le i \le r$, $\exists Q_i \in \mathbb{K}(X)$ tq $p_i = Q_i(u)$

(4) On suppose que u est diagonalisable ssi $\alpha_i = 1$ $\forall 1 \le i \le r$

mq $u^k = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^k p_i$ $\forall k \in \mathbb{N}$

Scanné avec CamScanner

Partie VII / Diagonalisation Simultanée /

On suppose ici $\dim E = n \geq 2$ (fini)

on considère $\boxed{u, v \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } u \circ v = v \circ u}$

1) on suppose que $\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$ est scindé a racine simple

i) Mq $\forall x \in E_{\lambda_i}(u)$, on a $\{x, v(x)\}$ est liée

ii) En deduire que $\exists \beta = (e_1 \dots e_n)$ base propre de E associée à la fois à u et à v

on dit alors que u et v sont simult diagble

iii) En deduire que ds ce cas $u+v$ est aussi diagble

2) On suppose ici que u et v sont tous les deux diagble

i) Justifier que $v|_{E_{\lambda_i}(u)}$ est bien defini et diagble

ii) pareil que VII.1.ii

iii) " " VII.1.iii

3) on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

i) Justifier que A, B diagble mais $A+B$ ne l'est pas

ii) Conclure

Scanné avec CamScanner

Partie VIII — Decomposition de Dunford

on suppose ici de demontrer le resultat suivant

$\forall A \in \mathcal{M}_n(K)$ tq $\chi_A(X)$ est scindé

$\exists! D \in \mathcal{M}_n(K)$ diagble

$\exists! N \in \mathcal{M}_n(K)$ nilpotent tq $A = D + N$

$DN = ND$

D est un polynôme en A

$\chi_A(X) = \chi_D(X)$

On considère alors E K-ev tq $\dim E = n$

$\mathcal{B}$ base de E tq $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$

$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, $E_i = \ker(u - \lambda_i \, id_E)^{\alpha_i}$

et $p_i = p_{E_i \parallel F_i}$ où $F_i = \bigoplus_{j \neq i} E_j$

avec $id_E = \sum_{i=1}^{r} p_i$ et $p_i = Q_i(u)$ poly en u

voir partie VI

1. Mq $v = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i$ est diagble
2. Mq $w = \sum_{i=1}^{r} (u - \lambda_i \, id_E) \circ p_i$ est nilpotent

   indic : la somme d'end nilpotent qui commutent est aussi nilpotent
3. Justifier que $u = v + w$, $\forall$ poly en u, $\chi_u(X) = \chi_v(X)$
4. En deduire l'existence puis l'unicité
5. Application : Mq A diagble $\Leftrightarrow$ e^A diagble

Scanné avec CamScanner

Partie IX — Decomposition de ~~Dunford~~ Frobenius

on considere ici E un K-ev tq $\dim E = n \geq 2$ finie

$\beta = (e_1, \dots, e_n)$ base de E fixé et $A = \mathcal{M}_\beta(u)$

on se propose de montrer ici le resultat suivant

$$\boxed{A \sim \text{une matrice diagonale par bloc dont tous les blocs sont des matrices compagnon}}$$

(1) Soit $(F_i)_{1 \leq i \leq m}$ des sev de E tq $\bigcup_{i=1}^{m} F_i$ sev de E

mq $\exists 1 \leq i \leq m$ tq $F_j \subset F_i$ $\forall 1 \leq j \leq m$

indic : par l'absurde et $F_1 \neq \bigcup_{i=1}^{m} F_i$

(2) Soit $x \in E$, $x \neq 0_E$ fixé

(i) mq $I_x = \{P \in K[X] \text{ tq } P(u)(x) = 0\}$ est un idéal de $K[X]$ engendré par un poly minimal noté Π_x

(ii) Dire pour quoi $\Pi_x \mid \Pi_u$

(iii) En deduire que $\{\Pi_x, x \in E\}$ est fini

(iv) En deduire que $\exists x_1 \in E$ tq $\Pi_{x_1} = \Pi_u$

indic : utiliser IX.1 pour $\bigcup_{x \in E} \operatorname{Ker}(\Pi_x(u))$

Scanné avec CamScanner

(3) On reprend les notations de la qst precedente

on pose $d = \deg(\pi_u) = \deg(\pi_{x_1})$

et $F_1 = \{ P(u)(x_1) \text{ tq } P \in \mathbb{K}[X] \}$

(i) Mq $(e_1 = x_1, e_2 = u(x_1), \dots, e_d = u^{d-1}(x_1))$ est libre de E

que $F_1 = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_d)$ et F_1 stable par u

(ii) Justifier que $u|_{F_1}$ est cyclique

(4) on pose $G_1 = \{ x \in E \text{ tq } e_d^*(u^k(x)) = 0 \ \forall k \in \mathbb{N} \}$

où $\underbrace{(e_1, \dots, e_n) \text{ base de } E}_{\text{thm de la base incomplete}}$ et $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale

(i) Justifier que G_1 stable par u et $F_1 \cap G_1 = \{0_E\}$

(ii) En deduire que l'app. $\varphi : E \to \mathbb{K}^d$, $x \mapsto (e_d^*(x), e_d^*(u(x)), \dots, e_d^*(u^{d-1}(x)))$ où

$\varphi|_{F_1}$ est un isom

(iii) En deduire que φ est surj

(iv) " " $E = F_1 \oplus \mathrm{Ker}\,\varphi$

(v) Verifier que $G_1 = \mathrm{Ker}\,\varphi$

(5) Conclure le resultat demandé

Scanné avec CamScanner

Partie V / Invariants de similitudes

E K-ev, $\dim E = n \geq 2$ (finie) $u \in \mathcal{L}(E)$

(1) Montrer le résultat suivant : pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$

il existe une unique famille de polynomes $(P_i)_{1 \leq i \leq r}$

et une ~~[illegible]~~ famille de sev $(E_i)_{1 \leq i \leq r}$ stable par u

tq $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$

u/E_i cyclique $\forall 1 \leq i \leq r$

$\pi_{u/E_i} = P_i$ divise P_{i-1} $\forall 2 \leq i \leq r$

les polynomes $P_1, \dots, P_r$ s'appelle invariants de similitude de u

(2) Justifier que la famille $(P_i)_{1 \leq i \leq r}$ ne dépend pas du choix de la base de E

donner la déf d'invariants de similitude pour $A \in \mathcal{M}_n(K)$

(3) En déduire que deux matrices sont semblable ssi ils ont les m̂ invariants de similitude

(4) Donner les invariants de similitude d'un end nilpotent

(5) Application : Decomposition de Jordan (Version 1)

Mq toute matrice nilpotente est semblable a une matrice diagonale par bloc dont tous les blocs sont de la forme $N_r = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(6) Version 2 : Même qst que (5) mais avec $N_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

Scanné avec CamScanner

Partie XI / Retour aux endom cycliques

E un K-ev tq $\dim E = n \geq 2$ (finie) et $u \in \mathcal{L}(E)$

① On suppose que $\boxed{\chi_u = \Pi_u, \text{ mq } u \text{ est cyclique}}$

② On suppose que $\boxed{(id_E, u, \dots, u^{n-1}) \text{ est libre} \quad \text{Mq } u \text{ est cyclique}}$

③ On suppose $\boxed{\dim K[u] = n, \text{ mq } u \text{ est cyclique}}$

④ On utilise ici les notations de partie X

$E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$ et E_i stable par u et $u/_{E_i}$ cyclique

on note $p_i = p_{E_i \| F_i}$ où $F_i = \bigoplus_{j \neq i} E_j$

i) Mq l'app $\phi : \mathcal{L}(E_1) \times \dots \times \mathcal{L}(E_r) \to \mathcal{L}(E)$

$(v_1, \dots, v_r) \longmapsto v = \sum_{i=1}^{r} v_i \circ p_i$

est bien définie

linéaire et injective

ii) Soit $v_i \in C(u/_{E_i})$ (le commutant)

Mq $v = \phi(v_1, \dots, v_r) \in C(u)$

iii) En déduire que $\boxed{\dim C(u) \geq n}$

⑤ Mq $\boxed{\dim C(u) = n \Rightarrow u \text{ cyclique}}$

⑥ Conclure que

$$\boxed{\begin{aligned} u \text{ cyclique} &\Leftrightarrow \chi_u = \Pi_u \\ &\Leftrightarrow \deg \Pi_u = n \\ &\Leftrightarrow (id_E, u, \dots, u^{n-1}) \text{ libre} \\ &\Leftrightarrow \dim K[u] = n \\ &\Leftrightarrow \dim C(u) = n \end{aligned}}$$

Scanné avec CamScanner

Partie XII / Qlq Applications

$\dim E = n \geq 2$ finie et $u \in \mathcal{L}(E)$

1) i) On suppose que u est cyclique. $\boxed{\text{Mq } \chi_u(u) = 0}$

ii) En déduire que $\chi_u(u) = 0$ pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$

2) i) Mq toute matrice compagnon est semblable à sa transposée

ii) En déduire que le résultat est encore vrai pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

3) i) Justifier que $n \leq \dim \mathcal{C}(u) \leq n^2$

ii) Etudier les cas d'égalité

4) i) Justifier que $1 \leq \dim K(u) \leq n$

ii) Etudier les cas d'égalité

15

FIN ET BONNE CHANCE

Scanné avec CamScanner