CPGE Réseau IBNGHAZI
Rabat - MP*1

My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Préparation Aux Concours
Intégrales à Paramètres

Thème 1 : Les Fonctions de Riemann (Centrale 2015)

II La fonction β

II.A – La fonction Γ

II.A.1) Soit $x > 0$. Montrer que $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Dans toute la suite, on notera Γ la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

On admettra que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition, à valeurs strictement positives et qu'elle vérifie, pour tout réel $x > 0$, la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

II.A.2) Soit x et α deux réels strictement positifs. Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ et donner sa valeur en fonction de $\Gamma(x)$ et α^x.

II.B – La fonction β et son équation fonctionnelle

Pour (x, y) dans $(\mathbb{R}^{+*})^2$, on définit $\beta(x, y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$.

II.B.1) Justifier l'existence de $\beta(x, y)$ pour $x > 0$ et $y > 0$.

II.B.2) Montrer que pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $\beta(x, y) = \beta(y, x)$.

II.B.3) Soient $x > 0$ et $y > 0$. Établir que $\beta(x+1, y) = \dfrac{x}{x+y}\beta(x, y)$.

II.B.4) En déduire que pour $x > 0$, $y > 0$, $\beta(x+1, y+1) = \dfrac{xy}{(x+y)(x+y+1)}\beta(x, y)$.

II.C – Relation entre la fonction β et la fonction Γ

On veut montrer que pour $x > 0$ et $y > 0$, $\quad \beta(x, y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ relation qui sera notée $(\mathcal{R})$.

II.C.1) Expliquer pourquoi il suffit de montrer la relation $(\mathcal{R})$ pour $x > 1$ et $y > 1$.

Dans toute la suite de cette question on suppose $x > 1$ et $y > 1$.

II.C.2) Montrer que $\beta(x, y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,\mathrm{d}u$.

On pourra utiliser le changement de variable $t = \dfrac{u}{1+u}$.

II.C.3) On note $F_{x,y}$ la primitive sur $\mathbb{R}^+$ de $t \mapsto e^{-t}t^{x+y-1}$ qui s'annule en 0. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, F_{x,y}(t) \leqslant \Gamma(x+y)$$

II.C.4) Soit $G(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}((1+u)a)\,\mathrm{d}u$.

Montrer que G est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

II.C.5) Montrer que $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} G(a) = \Gamma(x+y)\beta(x, y)$.

II.C.6) Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment $[c, d]$ inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$, puis que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

II.C.7) Exprimer pour $a > 0$, $G'(a)$ en fonction de $\Gamma(x)$, e^{-a} et a^{y-1}

II.C.8) Déduire de ce qui précède la relation $(\mathcal{R})$.

III La fonction digamma

On définit la fonction ψ (appelée fonction digamma) sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme étant la dérivée de $x \mapsto \ln(\Gamma(x))$.

Pour tout réel $x > 0$, $\psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

III.A – Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\psi(x+1) - \psi(x) = \dfrac{1}{x}$.

III.B – Sens de variation de ψ

III.B.1) À partir de la relation $(\mathcal{R})$, justifier que $\dfrac{\partial \beta}{\partial y}$ est définie sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$.

Établir que pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $\dfrac{\partial \beta}{\partial y}(x, y) = \beta(x, y)(\psi(y) - \psi(x+y))$.

III.B.2) Soit $x > 0$ fixé. Quel est le sens de variation sur $\mathbb{R}^{+*}$ de la fonction $y \mapsto \beta(x, y)$?

III.B.3) Montrer que la fonction ψ est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

III.C – Une expression de ψ comme somme d'une série de fonctions

III.C.1) Montrer que pour tout réel $x > -1$ et pour tout entier $n \geqslant 1$

$$\psi(1+x) - \psi(1) = \psi(n+x+1) - \psi(n+1) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right)$$

III.C.2) Soit n un entier $\geqslant 2$ et x un réel > -1. On pose $p = E(x) + 1$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x. Prouver que

$$0 \leqslant \psi(n+x+1) - \psi(n) \leqslant H_{n+p} - H_{n-1} \leqslant \frac{p+1}{n}$$

III.C.3) En déduire que, pour tout réel $x > -1$,

$$\psi(1+x) = \psi(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$$

Thème 2 : La transformée de Fourier (CNC 2003)

On travaille dans $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, qui est l'espace vectoriel de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$; on notera aussi $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{C}^p(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$) le sous-espace vectoriel des fonctions continues (resp. de classes $\mathcal{C}^p$, $\mathcal{C}^\infty$) à valeurs complexes. Pour toute fonction $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ et tout réel x, on pose

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)\, dt,$$

lorsque cette quantité a un sens.

Quand elle est définie, La fonction $\hat{f}$ s'appelle la transformée de FOURIER de f.

II. QUELQUES PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER D'UNE FONCTION

1. **Transformée de Fourier d'une fonction intégrable**

   (a) Soit f une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$; montrer que pour tout réel x, $\hat{f}(x)$ est bien définie et que la fonction $\hat{f}$ est bornée.

   (b) Si en plus f est continue, montrer que $\hat{f}$ est aussi continue.

2. **Transformations**

   (a) Montrer que l'application $F : \varphi \mapsto \hat{\varphi}$, définie sur l'espace vectoriel des fonctions complexes continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}$, à valeur dans $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, est linéaire.

   Dans la suite de cette question, f est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.

   (b) Vérifier que pour tout réel a, les fonctions $f_a : t \mapsto f(t-a)$ et ${}_af : t \mapsto f(at)$ possèdent des transformées de Fourier et montrer que

   $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f_a}(x) = e^{-iax}\hat{f}(x) \quad \text{et} \quad \widehat{{}_af}(x) = \frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{x}{a})\ (a \neq 0).$$

   (c) Exprimer de même la transformée de Fourier de l'application $t \mapsto f(t)e^{iat}$ en fonction de celle de f.

   (d) Si f est paire (resp. impaire), donner une expression de sa transformeé de Fourier sous forme d'une intégrale sur $[0, +\infty[$.

   (e) Que peut-on alors dire de la tarnsformée de Fourier d'une fonction réelle et paire (resp. impaire).

3. **Dérivation**

   On considère un élément f de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$; on suppose que f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

   (a) Montrer que f tend vers 0 en $\pm\infty$.

   (b) Montrer alors que

   $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f'}(x) = ix\hat{f}(x),$$

   puis en déduire que $\hat{f}$ tend vers 0 en $\pm\infty$.

   (c) On suppose de plus que l'application $g : t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$; montrer que $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

   $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (\hat{f})'(x) = -i\hat{g}(x).$$

III. Une formule d'inversion

A- Un autre exemple

Dans cette section, h désigne la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$; on admet que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, dt = \sqrt{\pi}$.

1. Vérifier que $\hat{h}$ est bien définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle satisfait l'équation différentielle

$$y' + \frac{x}{2}\, y = 0. \qquad (1)$$

2. Résoudre l'équation différentielle (1) et donner l'expression de $\hat{h}$.

3. Donner alors l'expression de la transformée de Fourier de la fonction $t \mapsto e^{-\varepsilon t^2}$, $\varepsilon > 0$.

B- Application à la formule d'inversion

Dans cette section, f désigne une fonction continue, bornée et intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que $\hat{f}$ soit aussi intégrable sur $\mathbb{R}$. Soit $(\varepsilon_n)_n$ une suite de réels strictement positifs tendant vers 0.

1. (a) Soit $v \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. En utilisant le théorème de la convergence dominée, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v(y) e^{-\varepsilon_n y^2}\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} v(y)\, dy.$$

   (b) Montrer de même que si $w \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ est une fonction bornée alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w(x + \varepsilon_n y) e^{-y^2}\, dy = w(x)\sqrt{\pi}.$$

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x) - \varepsilon_n y^2}\, dy \right) dt = 2\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + 2\sqrt{\varepsilon_n}\, s) e^{-s^2}\, ds.$$

3. Soit x un nombre réel.

   (a) Justifier que, pour tout couple (p, q) d'entiers naturels non nuls et tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_{-p}^{p} e^{ixy - \varepsilon y^2} \left(\int_{-q}^{q} f(t) e^{-iyt}\, dt \right) dy = \int_{-q}^{q} f(t) \left(\int_{-p}^{p} e^{-iy(t-x) - \varepsilon y^2}\, dy \right) dt.$$

   (b) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{q\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy - \varepsilon y^2} \left(\int_{-q}^{q} f(t) e^{-iyt}\, dt \right) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy - \varepsilon y^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt}\, dt \right) dy.$$

   (c) Montrer que, pour tout entier naturel non nul q et tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{p\to+\infty} \int_{-q}^{q} f(t) \left(\int_{-p}^{p} e^{-iy(t-x) - \varepsilon y^2}\, dy \right) dt = \int_{-q}^{q} f(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x) - \varepsilon y^2}\, dy \right) dt.$$

   (d) En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x) - \varepsilon y^2}\, dy \right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy - \varepsilon y^2} \hat{f}(y)\, dy.$$

4. Montrer alors que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \hat{f}(y)\, dy.$$

Thème 3 : Produit de Convolution (CNC 2024)

Pour tout réel strictement positif t , on considère les deux fonctions f_t et g_t qui sont définies sur $\mathbb{R}$ par,

$$f_t(x) = \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}} \quad \text{et} \quad g_t(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ txf_t(x) & \text{si } x > 0 \end{cases} .$$

Partie 3 : Produit de convolution et une transformé

Dans la suite du problème, on note $\mathbf{E}$ l'ensemble des fonctions h continues sur, $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, telles qu'il existe un réel positif M et un réel strictement positif λ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$, $|h(x)| \leq Mf_t(\lambda x)$.

On admet le résultat suivant : *si ϕ une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe deux applications ϕ_1 et ϕ_2 continues sur $\mathbb{R}$ et intégrables sur $\mathbb{R}$, vérifiant $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\phi(x, y)| \leq \phi_1(x)\phi_2(y)$, alors les deux expressions $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, y)dx \right) dy$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, y)dy \right) dx$ sont bien définies et elles sont égales.*

On rappelle que l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, noté $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, muni des deux lois" +" et "." usuelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Montrer que $(\mathbf{E}, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que la fonction f_t est un élément de $\mathbf{E}$.

2. Soient φ et ψ deux éléments de $\mathbf{E}$. On note $\varphi * \psi$ l'application définie, pour tout réel x, pour lequel l'intégrale existe, par $(\varphi * \psi)(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\psi(x - u)du$.

a) Montrer que $\varphi * \psi$ est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $\varphi * \psi = \psi * \varphi$.

c) Déterminer $f_t * f_t$.

d) Montrer que $\varphi * \psi$ est un élément de $\mathbf{E}$.

3. Soit φ un élément de $\mathbf{E}$. On définit la fonction $\widehat{\varphi}$ par $\widehat{\varphi}(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-xu}\varphi(u)du$.

   a) Montrer que $\widehat{\varphi}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

   b) Montrer que $\widehat{\varphi}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout x de $\mathbb{R}$, les expressions de $\widehat{\varphi}'(x)$ et $\widehat{\varphi}''(x)$, chacune à l'aide d'une intégrale.

4. Soient φ et ψ deux éléments de $\mathbf{E}$.

   a) Montrer qu'il existe un réel strictement positif α tel que, pour tout couple (x,u) de $\mathbb{R}^2$,

$$u^2+(x-u)^2 \geq \alpha\left(u^2+x^2\right)$$

   b) Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(\varphi*\psi)(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)dx.\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)dx$.

   c) Montrer que, pour tout réel ω, $\widehat{(\varphi*\psi)}(\omega)=\widehat{\varphi}(\omega).\widehat{\psi}(\omega)$.

Partie 4 : Une suite de fonctions construite à partir du produit de convolution

On note $\mathbf{E}_1$ l'ensemble des fonctions ψ de $\mathbf{E}$ telles que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)dx=1$. Pour toute fonction ϕ de $\mathbf{E}_1$, on considère la suite $(\phi_n)_{n\geq 1}$ définie par $\phi_1=\phi$ et pour tout entier $n\geq 2$, $\phi_n=\phi_{n-1}*\phi_1$

1. Montrer que, pour tout entier $n\geq 1, \phi_n$ est un élément de $\mathbf{E}_1$.

2. Déterminer, pour tout entier $n\geq 1$ et pour tout réel $x, \widehat{\phi_n}(x)$ en fonction de $\hat{\phi}(x)$ et de n.

3. Dans cette question, on prend $\phi=\left(\sqrt{\frac{t}{2\pi}}\right)f_t$, ou f_t est la fonction définie au début du problème.

   a) Montrer que, pour tout entier $n\geq 1$, il existe un réel $C_n(t)$, à déterminer, tel que $\forall x\in\mathbb{R};\ \phi_n(x)=C_n(t)\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2n}}$.

   b) Montrer qu'il existe une constante réelle ν strictement positive, tel que pour tout entier $n\geq 1$ et pour tout réel u, $\widehat{\phi_n}\left(u\sqrt{\frac{t}{n}}\right)=\mathrm{e}^{\nu u^2}$.

4. Soit ϕ un élément quelconque de $\mathbf{E}_1$. On pose pour tout entier naturel non nul n

$$M_{n,1}=\int_{-\infty}^{+\infty}u\phi_n(u)du,\quad M_{n,2}=\int_{-\infty}^{+\infty}u^2\phi_n(u)du \text{ et } V_n=M_{n,2}-M_{n,1}^2$$

   a) Montrer que la fonction $\widehat{\phi_n}$ admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 dont on précisera les coefficients à l'aide de $M_{n,1}$ et de $M_{n,2}$.

   b) En déduire que $M_{n,1}=nM_{1,1}$ et $V_n=nV_1$.

5. On suppose de plus dans cette question que la fonction ϕ vérifie $M_{1,1}=0$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\widehat{\phi_n}\left(u\sqrt{\frac{t}{n}}\right)$.

FiN

Thème 4 : Transformée de Laplace (CCP 2011)

Dans tout ce problème, on note :
- $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$;
- E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, continues, telles que, pour tout $x > 0$ réel, la fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$;
- F l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}^+$.

Pour tout f dans E, on appelle transformée de Laplace de f et on note $\mathcal{L}(f)$ la fonction définie pour tout $x > 0$ réel par :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t\ .$$

1. Question préliminaire

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Pour tout x dans $[a, +\infty[$, on pose :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On considère les propositions suivantes :

(i) f est intégrable sur $[a, +\infty[$;

(ii) F admet une limite finie en $+\infty$.

Donner, sans démonstration, toutes les implications possibles entre (i) et (ii) lorsque :

(a) f est positive sur $[a, +\infty[$;

(b) f n'est pas positive sur $[a, +\infty[$.

Partie I : Exemples et propriétés

2. **(a)** Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

(b) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

(c) Justifier que $\mathcal{L}$ est une application linéaire de E dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}_*^+, \mathbb{R})$, espace vectoriel des applications de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

3. **(a)** On considère la fonction $\mathcal{U} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $\mathcal{U}(t) = 1$. Déterminer $\mathcal{L}(\mathcal{U})$.

(b) Soit $\lambda \geqslant 0$ réel. On considère la fonction $h_\lambda : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie pour tout $t \geqslant 0$ réel par :

$$h_\lambda(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

Démontrer que h_λ est dans E et déterminer $\mathcal{L}(h_\lambda)$.

4. Soient f dans E et n dans $\mathbb{N}$. On considère $g_n : t \mapsto t^n f(t)$ de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
Pour $x > 0$, justifier de l'existence de $A > 0$ tel que $t^n \mathrm{e}^{-xt} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}$ pour tout $t \geqslant A$.
En déduire que g_n est un élément de E.

5. **Transformée de Laplace d'une dérivée**
Soit f dans E de classe C^1, croissante et bornée sur $[0, +\infty[$. Démontrer que f' est encore dans E et que l'on a :
$$\forall x \in]0, +\infty[, \ \ \mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0) \ .$$

6. **Régularité d'une transformée de Laplace**
   (a) Démontrer que pour tout f dans E, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que l'on a $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(g_1)$ où g_1 a été définie à la question **4**.
   (b) Démontrer que pour tout f dans E, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathcal{L}(f)^{(n)}(x)$ à l'aide d'une transformée de Laplace.

Partie II : Comportements asymptotiques de la transformée de Laplace

Dans toute cette partie, f est un élément de E.

7. On suppose dans cette question que f est dans F.
   (a) Déterminer la limite en $+\infty$ de $\mathcal{L}(f)$.
   (b) *Théorème de la valeur initiale*
   On suppose, de plus, que f est de classe C^1 et croissante sur $\mathbb{R}^+$, avec f' bornée sur $\mathbb{R}^+$.
   Démontrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$.

8. **Théorème de la valeur finale**
On suppose dans cette question que $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} f(t) = \ell$ où ℓ est un réel. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0.
   (a) Démontrer que f appartient à F.
   (b) Soit n un entier naturel. Démontrer que $a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(x)\,\mathrm{d}x$ où h_n est la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $h_n(x) = \mathrm{e}^{-x} f\left(\dfrac{x}{a_n}\right)$.
   (c) En déduire, à l'aide du théorème de convergence dominée, que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \ell$.
   (d) Lorsque $\ell \neq 0$, déterminer un équivalent de $\mathcal{L}(f)(x)$ en 0.

9. Dans cette question, on suppose que f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et on pose $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout x dans $[0, +\infty[$.

(a) Démontrer que R est une fonction de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ et déterminer R'.
En déduire que, pour tout $x > 0$ réel, on a : $\mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x\mathcal{L}(R)(x)$.

(b) On fixe $\varepsilon > 0$.
Justifier de l'existence de A réel positif tel que pour tout $t \geqslant A$, on ait $|R(t)| \leqslant \varepsilon$.
En déduire que, pour tout $x > 0$, on a :

$$|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leqslant x \int_0^A |R(t)| \,\mathrm{d}t + \varepsilon$$

(c) Démontrer que $\mathcal{L}(f)$ se prolonge par continuité en 0 (on précisera la valeur en 0 de ce prolongement).

Partie III : Application

10. Calcul de l'intégrale de Dirichlet

Ici f est la fonction définie par $f(0) = 1$ et $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ pour $t > 0$ réel.

(a) Démontrer que la fonction $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite réelle ℓ en $+\infty$.

(b) En considérant la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ où $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)| \,\mathrm{d}t$, démontrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

(c) Soit $x > 0$. Démontrer, en détaillant les calculs, que pour tout $X > 0$ on a :

$$\int_0^X (\sin t)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{1+x^2}\left(\mathrm{e}^{-xX}(x\sin X + \cos X) - 1\right) .$$

Démontrer que la fonction $t \mapsto (\sin t)\,\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
Déterminer alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\sin t)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

(d) Déterminer, pour $x > 0$, une expression simple de $\mathcal{L}(f)(x)$ et en déduire ℓ.
Pour cela, on pourra utiliser le résultat suivant (la démarche de la preuve étant identique à celle de la question 9) :

Lorsque f dans E vérifie $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\displaystyle\lim_{x\to 0} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$.

On notera que, par rapport à la question **9**, on a remplacé l'hypothèse f intégrable sur $\mathbb{R}^+$ par l'hypothèse $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \ell \in \mathbb{R}$.

Thème 5 : Intégrales de Wallis (Mines 2023)

Préliminaires

Dans tout le sujet, l'intervalle $]-1,+\infty[$ de $\mathbf{R}$ est appelé I et σ et f sont les fonctions, de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, définies par :

$$\sigma(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k^2}$$

et

$$f(x)=\int_0^{\pi/2}(\sin(t))^x\ \mathrm{d}t.$$

On se propose, dans cette épreuve, d'étudier f (domaine de définition, régularité, variations, convexité, développement éventuel en série entière,...) puis, dans la dernière partie, de montrer qu'elle est la seule fonction numérique à vérifier certaines propriétés.

1 Calcul de $\sigma(1)$

1 ▷ Déterminer le domaine de définition de σ puis justifier que σ est continue sur celui-ci.

2 ▷ Exhiber deux nombres réels α et β tels que :

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\ \int_0^{\pi}(\alpha t^2+\beta t)\cos(nt)\ \mathrm{d}t=\frac{1}{n^2},$$

puis vérifier que si $t\in]0,\pi]$, alors :

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}\cos(kt)=\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}-\frac{1}{2}.$$

3 ▷ Justifier que, si φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,\pi]$ dans $\mathbf{R}$, alors

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{\pi}\varphi(t)\sin(xt)\ \mathrm{d}t=0,$$

et en conclure que

$$\sigma(1) = \frac{\pi^2}{6}\cdot$$

2 Équivalents

4 ▷ Déterminer le domaine de définition de f puis vérifier que

$$\forall x \in I,\ (x+1)f(x) = (x+2)f(x+2). \tag{1}$$

5 ▷ Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$, décroissante et convexe sur I.

6 ▷ Donner un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers -1.

7 ▷ Montrer que pour tout entier naturel n,

$$f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

puis que :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\cdot$$

8 ▷ Représenter graphiquement f en exploitant au mieux les résultats précédents.