Préparation aux Concours (CNC-CCP)

Intégration

Ce devoir est consacré à des calculs incontournables que tout élève de MPSI doit avoir vus au moins une fois dans sa vie. Les deux dernières parties en sont indépendantes, mais utilisent toutes les deux (quoique très partiellement pour la dernière) les calculs de la première partie.

I. Intégrales de Wallis.

On définit pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale de Wallis W_n par $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\ dt$.

1. Calculer les valeurs de W_0, W_1 et W_2.
2. Démontrer que $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\ dt$.
3. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$.
4. Montrer par récurrence que $W_{2n} = \dfrac{\pi}{2} \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ et $W_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.
5. Déterminer la monotonie de la suite (W_n), en déduire sa convergence.
6. Déterminer la limite de $\dfrac{W_n}{W_{n+1}}$ quand n tend vers $+\infty$.
7. En déduire la formule de Wallis : $\dbinom{2n}{n} \sim \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$.

II. Le retour d'une somme bien connue.

Dans cette deuxième partie, on va redémontrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Pour cela, on note $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t)\ dt$.

1. Montrer que, $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $t \leqslant \dfrac{\pi}{2} \sin(t)$.
2. En déduire que $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}(W_{2n} - W_{2n+2})$.
3. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{W_{2n}} = 0$.
4. Montrer que $W_{2n+2} = (2n+2) \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(t) \cos^{2n+1}(t)\ dt$.

5. En déduire que $\dfrac{W_{2n+2}}{n+1} = (2n+1)u_n - (2n+2)u_{n+1}$.
6. En déduire que $2\left(\dfrac{u_n}{W_{2n}} - \dfrac{u_{n+1}}{W_{2n+2}}\right) = \dfrac{1}{(n+1)^2}$.
7. Démontrer enfin que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

III. La formule de Stirling.

On note dans cette dernière partie $v_n = \left(\dfrac{e}{n}\right)^n \dfrac{n!}{\sqrt{n}}$.

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$.
2. Montrer que la suite (v_n) est décroissante (exploiter la question précédente après avoir simplifié $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$ est une bonne piste) et en déduire sa convergence. On notera désormais l sa limite.
3. On note g_k la fonction affine vérifiant $g_k(k) = \ln(k)$ et $g_k(k+1) = \ln(k+1)$. Montrer que, $\forall t \in [k, k+1]$, $0 \leqslant \ln(t) - g_k(t) \leqslant (t-k)\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k-1}\right)$.
4. En déduire que $0 \leqslant \displaystyle\int_1^n \ln(t)\, dt - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln(k+1) + \ln(k)}{2} \leqslant \frac{1}{2}$.
5. En déduire que $\ln\left(\dfrac{n}{e}\right)^n - \ln(n!) + \ln(\sqrt{n}) \leqslant -\dfrac{1}{2}$.
6. Montrer que la suite (v_n) est minorée par $\sqrt{e}$.
7. En déduire que la limite l de la suite (v_n) ne peut pas être nulle.
8. Déterminer la valeur de l à l'aide de la formule de Wallis, et conclure que la formule de Stirling est vérifiée : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.
9. Déterminer l'erreur relative commise en approchant 10!, puis 100! par la formule de Stirling (on a bien sûr le droit d'utiliser le premier Python venu pour calculer les valeurs).

I. Intégrales de Wallis.

1. Allons-y : $W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ dt = \frac{\pi}{2}$, $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\ dt = [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$. Pour W_2, on se rappelle bien sûr la formule de duplication $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$ pour en déduire la linéarisation $\cos^2(t) = \frac{\cos(2t)+1}{2}$, puis calculer $W_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\ dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t) + 1\ dt = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2t)}{2} + t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$.
2. Il suffit de penser à effectuer le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ (donc $du = -dt$), qui se contente d'échanger les bornes de l'intégrale et surtout de transormer le cos en $\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sin(u)$. On obtient alors immédiatement $W_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -\sin^n(u)\ du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(u)\ du$.
3. Si on veut faire vite, il faut penser pour l'IPP à poser $u(t) = \cos^{n+1}(t)$ et $v'(t) = \cos(t)$, donc $u'(t) = -(n+1)\sin(t)\cos^n(t)$ et $v(t) = \sin(t)$, pour obtenir $W_{n+2} = [\sin(t)\cos^{n+1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos^n(t)\ dt = 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2(t))\cos^n(t)\ dt = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) - \cos^{n+2}(t)\ dt = (n+1)(W_n - W_{n+2})$. On en déduit que $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, soit $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$.
4. On va donc faire deux récurrences, une pour chaque formule. Commençons par celle donnée pour les termes d'indices pairs de la suite : $\frac{\pi}{2} \times \frac{0!}{2^0(0!)^2} = \frac{\pi}{2} = W_0$, ce qui initialise notre première récurrence. Supposons la formule donnée correcte pour W_{2n}, alors d'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence $W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}W_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{2^{2n}(n!)^2(2n+2)^2} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2}$, ce qui prouve l'éhérédité et achève la récurrence.
   Même principe pour démontrer la formule pour les termes d'indices impairs : $\frac{2^0(0!)^2}{1!} = 1 = W_1$, et en supposant la formule vraie pour W_{2n+1}, alors $W_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3}W_{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+3}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2(2n+2)^2}{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)} = \frac{2^{2n+2}((n+1)!)^2}{(2n+3)!}$, ce qui prouve l'hérédité.
5. Puisque le cosinus est positif entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ (et évidemment plus petit que 1), on a $\cos^{n+1}(t) \leqslant$

$\cos^n(t)$ sur cet intervalle, donc par intégration $W_{n+1} \leqslant W_n$. La suite est donc décroissante. Elle est positive donc minorée, donc convergente.

6. Il suffit d'appliquer la décroissance de la suite (W_n) pour obtenir l'encadrement $\dfrac{W_n}{W_n} \leqslant \dfrac{W_n}{W_{n+1}} \leqslant \dfrac{W_n}{W_{n+2}}$, soit $1 \leqslant \dfrac{W_n}{W_{n+1}} \leqslant \dfrac{n+1}{n+2}$ en reprenant le résultat de la question 3. Puisque le membre de droite a pour limite 1, une simple application du théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{W_n}{W_{n+1}} = 1$.
7. La question précédente prouve que $W_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{2n+1}$, donc en exploitant les formules explicites $\dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \sim \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$. Quitte à réarranger un peu en faisant passer des termes à gauche et à droite, $\left(\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\right)^2 \sim \dfrac{2^{4n}\times 2}{\pi\times(2n+1)}$, donc en passant tout à la racine carrée (on a le droit, tout est positif et les puissances fixes conservent les équivalents) $\dbinom{2n}{n} \sim \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{\pi(n+\frac{1}{2})}} \sim \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$.

II. Le retour d'une somme bien connue.

1. On peut essayer de voir cette inégalité comme une inégalité de convexité, ou simplement poser $f(t) = \dfrac{\pi}{2}\sin(t) - t$. La fonction f est dérivable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, et $f'(t) = \dfrac{\pi}{2}\cos(t) - 1$. Cette dérivée s'annule lorsque $\cos(t) = \dfrac{2}{\pi}$, ce qui se produit à un moment sur notre intervalle d'étude (puisque $0 < \dfrac{2}{\pi} < 1$). La fonction f est alors croissante puis décroissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, et comme $f(0) = 0$ et $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} = 0$, f est nécessaire positive, ce qui prouve l'inégalité souhaitée.
2. En exploitant le résultat de la question précédente, $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $t^2\cos^{2n}(t) \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}\sin^2(t)\cos^{2n}(t) = \dfrac{\pi^2}{4}(1-\cos^2(t))\cos^{2n}(t) = \dfrac{\pi^2}{4}(\cos^{2n}(t) - \cos^{2n+2}(t))$. Il suffit d'intégrer cette majoration entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ pour obtenir $u_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}(W_{2n} - W_{2n+2})$. La positivité de u_n est évidente : on intègre une fonction positive.
3. Si on divise l'encadrement précédent par W_{2n}, on obtient $0 \leqslant \dfrac{u_n}{W_{2n}} \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}\left(1 - \dfrac{n+1}{n+2}\right) = \dfrac{\pi^2}{4(n+2)}$ (on a repris la relation de la question I.3 pour simplifier à droite). Un petit coup de théorème des gendarmes montre alors le résultat demandé.
4. On effectue sur W_{2n+2} une IPP en posant $u(t) = \cos^{2n+2}(t)$, donc $u'(t) = -(2n+2)\sin(t)\cos^{2n+1}(t)$, et $v'(t) = 1$ qu'on intègre en $v(t) = t$. On obtient alors $W_{2n+2} = [t\cos^{2n+2}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2n+2)t\sin(t)\cos^{2n+1}(t)\ dt = (2n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\cos^{2n+1}(t)\ dt$.
5. On a donc $\dfrac{W_{2n+2}}{n+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t\sin(t)\cos^{2n+1}(t)\ dt$. Effectuons une nouvelle IPP en posant $u(t) = \sin(t)\cos^{2n+1}(t)$, donc $u'(t) = \cos^{2n+2}(t) - (2n+1)\sin^2(t)\cos^{2n}(t) = \cos^{2n+2}(t) - (2n+1)(1-$

$\cos^2(t))\cos^{2n}(t) = (2n+2)\cos^{2n+2}(t) - (2n+1)\cos^{2n}(t)$, et $v'(t) = 2t$ qu'on va intégrer en $v(t) = t^2$ pour obtenir $\dfrac{W_{2n+2}}{n+1} = [t^2 \sin(t)\cos^{2n+1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2((2n+2)\cos^{2n+2}(t) - (2n+1)\cos^{2n}(t))\ dt = (2n+1)u_n - (2n+2)u_{n+1}$ en développant simplement la dernière intégrale (le crochet est nul, comme pour l'IPP précédente).

6. En divisant la relarion précédente par W_{2n+2}, on a $\dfrac{1}{n+1} = (2n+1)\dfrac{u_n}{W_{2n+2}} - (2n+1)\dfrac{u_{n+1}}{W_{2n+2}}$. Or, on a démontré dans la première partie de l'exercice que $W_{2n+2} = \dfrac{2n+1}{2n+2} W_{2n}$, donc $\dfrac{1}{n+1} = (2n+2)\dfrac{u_n}{W_{2n}} - (2n+2)\dfrac{u_{n+1}}{W_{2n+2}}$, puis $\dfrac{1}{(n+1)^2} = \dfrac{2u_n}{W_{2n}} - \dfrac{2u_{n+1}}{W_{2n+2}}$, exactement la relation souhaitée.

7. En sommant la relation précédente pour toutes les valeurs de k comprises entre 0 et $n-1$, on va observer un télescopage : $2\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k}{W_{2k}} - \frac{u_{k+1}}{W_{2k+2}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2}$, soit $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 2\left(\frac{u_0}{W_0} - \frac{u_n}{W_{2n}}\right)$. D'après la question 3, on peut donc affirmer la convergence de la somme infinie, et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{u_0}{W_0}$. Or, on sait déjà que $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$, et $u_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\ dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24}$. On en déduit que la limite recherchée vaut $2 \times \dfrac{2\pi^3}{24\pi} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

III. La formule de Stirling.

1. Les variations de f sont les mêmes que celles de $\ln(f)$: $x \mapsto \left(x + \dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ (fonction qu'on notera g pour la suite de la question), dont on va donc calculer la dérivée (elle est bien définie et dérivable sur l'intervalle $[1, +\infty[$) : $g'(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) + \left(x + \dfrac{1}{2}\right) \times \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{2x+1}{2x(x+1)}$. Le signe n'étant pas évident, on va dériver une deuxième fois : $g''(x) = -\dfrac{1}{x(x+1)} - \dfrac{4x(x+1) - (4x+2)(2x+1)}{4x^2(x+1)^2} = -\dfrac{1}{x(x+1)} + \dfrac{4x^2 + 4x + 1 - 2x^2 - 2x}{2x^2(x+1)^2}$ $= \dfrac{-2x^2 - 2x + 2x^2 + 2x + 1}{2x^2(x+1)^2} = \dfrac{1}{2x^2(x+1)^2} > 0$. La fonction g' est donc strictement croissante sur $[1, +\infty[$, et a une limite nulle en $+\infty$ (calcul facile), donc g' est négative et g est donc une fonction décroissante. On en déduit que la fonction f elle-même est décroissante.

2. Commençons par calculer $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\dfrac{e}{n+1}\right)^{n+1} \dfrac{(n+1)!}{\sqrt{n+1}} \times \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \dfrac{\sqrt{n}}{n!} = \dfrac{en^n(n+1)\sqrt{n}}{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}} = e \times \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}} = \dfrac{e}{f(n)}$, où f est la fonction étudiée dans la question précédente. On sait que f est décroissante, de plus $\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$ (équivalent classique du cours) donc $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x \times \dfrac{1}{x} = 1$, ce qui prouve que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = e$. Comme f est décroissante, on aura donc toujours $f(n) > e$, et $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} < 1$, ce qui prouve la décroissance

de la suite (v_n) (calculer les ln comme le suggérait l'énoncé ne sert en fait à rien). Comme la suite est bien sûr minorée par 0, elle converge donc nécessairement.

3. La fonction g_k est une fonction affine correspondant à la corde passant par les deux points de la courbe de la fonction ln d'abscisses k et $k+1$. La fonction ln étant concave sur $[k, k+1]$, sa courbe est donc située au-dessus de celle de g_k sur cet intervalle, ce qui justifie que $0 \leqslant \ln(t) - g_k(t)$. L'autre inégalité ne semblant pas triviale, posons brutalement $h_k(x) = (t-k)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \ln(t) + g_k(t)$, la fonction h_k est dérivable sur $[k, k+1]$ et $h'_k(t) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{t} + g'_k(t)$. Or, g_k est une fonction affine correspondant à une droite de pente $\ln(k+1) - \ln(k)$, donc $h'_k(t) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{t} + \ln(k+1) - \ln(k)$. Cette dérivée est croissante (seul le terme $-\frac{1}{t}$ est variable), sa valeur minimale est donc $h'_k(k) = \ln(k+1) - \ln(k) - \frac{1}{k+1}$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel $c \in [k, k+1]$ tel que $\frac{\ln(k+1) - \ln(k)}{k+1-k} = \ln'(c) = \frac{1}{c}$, ce qui prouve que $\ln(k+1) - \ln(k) = \frac{1}{c} \geqslant \frac{1}{k+1}$ (non ce n'est pas la seule façon de prouver ça, mais c'est joli), et donc que $h'_k(k) \geqslant 0$. La fonction h_k est donc croissante. Comme $h_k(k) = -\ln(k) + g_k(k) = 0$, la fonction h_k est elle-même toujours positive, ce qui prouve l'encadrement demandé.

4. On veut manifestement intégrer l'encadrement précédent entre k et $k+1$, puis additionner les encadrements obtenus lorsque k varie entre 1 et $n-1$. La fonction g_k étant affine sur l'intervalle $[k, k+1]$, son intégrale sur l'intervalle correspond à l'aire d'un trapèze rectangle dont les bases ont pour longueur $\ln(k)$ et $\ln(k+1)$ et la hauteur est égale à 1, donc $\int_k^{k+1} g_k(t)\,dt = \frac{\ln(k) + \ln(k+1)}{2}$ (si vous ne connaissez pas la formule pour le calcul d'aire d'un trapèze, refaites un calcul un peu plus détaillé). De même, le membre de droite de l'encadrement précédent correspond à une fonction affine sur $[k, k+1]$, avec pour valeurs 0 en k et $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ en $k+1$, donc $\int_k^{k+1} (t-k)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$. Or, $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{2}$ (somme télescopique), ce qui donne l'inégalité de droite de l'encadrement demandé.

5. On peut calculer $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) + \ln(k+1) = \frac{1}{2}\ln\left(\prod_{k=1}^{n-1} k+1\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\prod_{k=1}^{n-1} k\right) = \frac{1}{2}\ln(n!) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n!}{n}\right) = \ln(n!) - \ln(\sqrt{n})$. De plus, $\int_1^n \ln(t)\,dt = [t\ln(t) - t]_1^n = n\ln(n) - n + 1 = n(\ln(n) - \ln(e)) - 1 = \ln\left(\frac{n}{e}\right)^n + 1$. Il n'y a qu'à tout remplacer et passer le 1 à droite pour transformer la majoration de la question précédente en celle demandée à celle-ci.

6. La majoration précédente peut exactement s'écrire $\ln\left(\frac{1}{v_n}\right) \leqslant -\frac{1}{2}$, soit $\ln(v_n) \geqslant \frac{1}{2}$ et donc $v_n \geqslant e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

7. Une suite convergente minorée par $\sqrt{e}$ a une limite supérieure ou égale à $\sqrt{e}$, et donc certainement pas nulle.

8. Puisque $v_n \sim l \neq 0$, on peut écrire $n! \sim l\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$, donc $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim l\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2n} \times \frac{(e^n)^2}{l^2(n^n)^2 \times n} = \frac{2^{2n}\sqrt{2}}{l\sqrt{n}}$. En comparant avec l'équivalent donné par la formule de Wallis, on constate que les termes non constants sont les mêmes (heureusement !), et donc qu'on doit avoir $\frac{\sqrt{2}}{l} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, soit $l = \sqrt{2\pi}$, ce qui donne bien l'équivalent souhaité : $n \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.
9. La véritable valeur de 10! est 3 628 800, la formule de Stirling appliquée pour $n = 10$ donne la valeur approchée $\sqrt{20\pi}\left(\frac{10}{e}\right)^{10} \simeq 3.599 \times 10^6$, soit une erreur relative d'environ 0.83% (moins d'un pour cent, c'est déjà assez bon). Si on monte jusqu'à $n = 100$, on a $100! \simeq 9.33262 \times 10^{157}$ (oui, c'est bien un nombre à 158 chiffres, c'est gros) et $\sqrt{200\pi}\left(\frac{100}{e}\right)^{100} \simeq 9.32485 \times 10^{157}$, soit une erreur relative d'environ 0.08% (dix fois moins que la précédente, le quotient des deux suites converge vers 1 mais pas extrêmement vite). Bien entendu, l'écart absolu entre les deux est absolument énorme, mais vu la taille des nombres eux-même, c'est assez normal.