

Préparation aux Concours (Cours)

Transformée de Laplace

1. Principe de base

DÉFINITION 1. La transformée de Laplace d'une fonction f , dite **original**, est $F = \mathcal{L}(f)$ définie par

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

Cela est défini pour p assez grand (selon f).

Usage :

la transformée de Laplace, i.e. remplacer f par F , transforme les dérivations en multiplications. À une expression différentielle en f correspond donc **le produit de F par un polynôme**. Si on sait récupérer l'original d'une fraction rationnelle, on peut donc ainsi résoudre des équations différentielles.

2. Exemples

On a bien sûr (!) la transformée de 1 qui est $\int e^{-pt} dt = 1/p$. À peine plus délicat :

$$f(t) = \sin(t) \quad F(p) = \frac{1}{1+p^2} \quad f(t) = \sin(\omega t) \quad F(p) = \frac{\omega}{\omega^2 + p^2}$$

$$f(t) = \cos(t) \quad F(p) = \frac{p}{1+p^2} \quad f(t) = \cos(\omega t) \quad F(p) = \frac{p}{\omega^2 + p^2}$$

viennent bien par parties (deux fois).

$$f(t) = e^{at} \quad F(p) = \frac{1}{p-a} \quad (a \text{ réel ou pas}) \quad f(t) = t^n \quad F(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

Les exponentielles sont utiles pour des pbs mécaniques (régimes quasi périodiques et autres).

3. Quelques secrets

$f \mapsto F$ est une application linéaire bijective. . . si l'on choisit bien les espaces de départ et d'arrivée. En particulier la donnée de F **détermine** f (unicité).

PROPOSITION. La transformée de Laplace de la dérivée f' est

$$\mathcal{L}(f')(p) = pF(p) - f(0)$$

En particulier quand $f(0) = 0$ on a $\mathcal{L}(f')(p) = pF(p)$ (dérivée = produit).

Plus généralement bien sûr

$$\mathcal{L}(f'')(p) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$$

etc. . .

Exemple : cf. les transformées de cos et sin.

Dans l'autre sens c'est plus simple :

PROPOSITION. Dériver l'image revient à multiplier l'original par $-t$:

$$\mathcal{L}(-tf(t)) = F'(p) \quad \text{i.e.} \quad \mathcal{L}^{-1}(F') = -tf(t)$$

Application : la dérivée de $\arctan p$ étant l'image de $\sin$, c'est que l'image du sin cardinal est - arctan à une constante près !

PROPOSITION. Transformées : il est bon de connaître ces « bricolages ».

$$\mathcal{L}(f(at)) = \left(p \mapsto \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \right)$$

$$\mathcal{L}(f(t-a)) = e^{-ap} F(p)$$

proviennent d'un changement de variable (facile à refaire). Exemple :

$$\mathcal{L}(\sin(2t)) = \frac{1/2}{1 + (p/2)^2} = \frac{2}{4 + p^2}$$

4. Résolution d'équations différentielles

Il est impératif de disposer des conditions initiales.

4.1. Exemple 1

$x''(t) + x(t) = 2 \cos t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$. Soit f la solution, il vient

$$\mathcal{L}(f'') + \mathcal{L}(f) = 2\mathcal{L}(\cos) \iff p^2 F - 0pF(p) - 1 + F(p) = \frac{2p}{1 + p^2}$$

On en tire

$$F(p) = \frac{2p}{(p^2 + 1)^2} + \frac{1}{p^2 + 1} = -\left(\frac{1}{p^2 + 1}\right)' + \frac{1}{p^2 + 1}$$

d'où coolos (dérivée d'une image. . .)

$$f(t) = +t \sin t + \sin t$$

4.2. Exemple 2

$x''' + x' = 1$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$. On a tout simplement

$$p^3 F(p) + pF(p) = \frac{1}{p} \iff F(p) = \frac{1}{p^2(p^2 + 1)} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 + 1} \iff f(t) = t - \sin t$$

4.3. Transitoires

Une sinusoïde amortie est un original du genre $t \mapsto \operatorname{Re}(e^{(-a+i\omega)t})$ (à moins que ce n'en soit la partie imaginaire). Sa transformée est donc

$$F(p) = \operatorname{Re} \frac{1}{p + a - i\omega} = \frac{p + a}{(p + a)^2 + \omega^2} \quad \text{ou} \quad \operatorname{Im} \frac{1}{p + a - i\omega} = \frac{\omega}{(p + a)^2 + \omega^2}$$

Réciproquement, quand on a une $F(p)$ de la forme $\frac{up + v}{p^2 + 2\alpha p + \beta}$, on obtient le taux de décroissance (ou d'amortissement) $\alpha = \alpha$, et la pseudo-pulsation ω est telle que

$$\boxed{\text{la valeur minimum de } p^2 + 2\alpha p + \beta \text{ vaut } \omega^2 (= \beta - \alpha^2).}$$

Pour l'amplitude, désolé mais c'est compliqué ! Surtout quand il y a du cosinus. . .

Un dernier détail utile : l'original est un sinus (i.e. est nul en 0) ssi $u = 0$.

Exemple : on a $F(p) = \frac{4}{p^2 + 100p + 2600}$.

Il vient $\alpha = 50$, $\omega^2 = 100$, $\omega = 10$ et l'original est $\frac{1}{5} \sin(10t)e^{-50t}$.