

Préparation aux Concours (CCP)

**Fonctions de Riemann**

**PROBLÈME : Fonction Digamma**

**Partie préliminaire**

**III.1.**

**III.1.a.** Soit  $x \in ]0, +\infty[$ , démontrer que la fonction  $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

**III.1.b.** On note, pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$  (fonction Gamma d'Euler).

Démontrer que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $\Gamma(x) > 0$ .

**III.1.c.** Démontrer que la fonction  $\Gamma$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  puis exprimer  $\Gamma'(x)$  sous forme d'intégrale.

**III.2.** Pour tout entier  $n \geq 2$ , on pose  $u_n = \int_{n-1}^n \frac{1}{t}dt - \frac{1}{n}$ .

**III.2.a.** Utiliser un théorème du cours pour justifier simplement que la série  $\sum_{n \geq 2} u_n$  converge.

**III.2.b.** Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ .

Démontrer que la suite  $(H_n)_{n \geq 1}$  converge.

La limite de la suite  $(H_n)_{n \geq 1}$  sera notée  $\gamma$  dans tout le sujet ( $\gamma$  est appelée la constante d'Euler). Dans la suite de ce problème, on définit pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$  appelée fonction Digamma.

### Expression de la fonction Digamma à l'aide d'une série

**III.3.** Pour  $x \in ]0, +\infty[$  et pour tout entier  $n \geq 1$ , on définit la fonction  $f_n$  sur  $]0, +\infty[$  telle que :  
pour tout  $t \in ]0, n]$ ,  $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$  et pour tout  $t \in ]n, +\infty[$ ,  $f_n(t) = 0$ .

**III.3.a.** Démontrer que pour tout  $x < 1$ ,  $\ln(1-x) \leq -x$ .

En déduire que pour tout entier  $n \geq 1$ , pour tout  $x \in ]0, +\infty[$  et tout  $t \in ]0, +\infty[$ ,  $0 \leq f_n(t) \leq e^{-t} t^{x-1}$ .

**III.3.b.** En utilisant le théorème de convergence dominée, démontrer que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  
$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt.$$

**III.4.** On pose, pour  $n$  entier naturel et pour  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $I_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du$ .

**III.4.a.** Après avoir justifié l'existence de l'intégrale  $I_n(x)$ , déterminer, pour  $x > 0$  et pour  $n \geq 1$ , une relation entre  $I_n(x)$  et  $I_{n-1}(x+1)$ .

**III.4.b.** En déduire, pour  $n$  entier naturel et pour  $x \in ]0, +\infty[$  une expression de  $I_n(x)$ .

**III.4.c.** Démontrer que, pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$  (formule de Gauss).

**III.5.** Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note toujours  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ .

En remarquant que pour  $n \geq 1$  et  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $\frac{1}{n^x} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) = e^{xH_n} \prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}\right]$ , démontrer que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}\right]$  (formule de Weierstrass).

### III.6.

**III.6.a.** En déduire que la série  $\sum_{k \geq 1} \left[\ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right]$  converge simplement sur  $]0, +\infty[$ .

**III.6.b.** On pose, pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right]$ . Démontrer que l'application  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$  et exprimer  $g'(x)$  comme somme d'une série de fonctions.

**III.6.c.** En déduire que, pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $\psi(x) = \frac{-1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$ . On rappelle que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ .

### III.7.

**III.7.a.** Que vaut  $\psi(1)$ ? En déduire la valeur de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt$ .

**III.7.b.** Calculer, pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $\psi(x+1) - \psi(x)$  puis démontrer que, pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $\psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ .

**III.7.c.** On pose, pour tout  $(x,y) \in ]0, +\infty[^2$  et  $k$  entier naturel,  $j_k(y) = \frac{1}{k+y+1} - \frac{1}{k+y+x}$ .

Démontrer que la série  $\sum_{k \geq 0} j_k$  converge uniformément sur  $]0, +\infty[$ .

En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\psi(x+n) - \psi(1+n))$ .

**III.8.** Déterminer l'ensemble des applications  $f$  définies sur  $]0, +\infty[$  et à valeurs réelles vérifiant les trois conditions :

- $f(1) = -\gamma$ ,
- pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $f(x+1) = f(x) + \frac{1}{x}$ ,
- pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x+n) - f(1+n)) = 0$ .

## Autour de la fonction Digamma

**III.9.** Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ .

On effectue un premier tirage d'une boule dans l'urne et on adopte le protocole suivant :

si on a tiré la boule numéro  $k$ , on la remet alors dans l'urne  
avec  $k$  nouvelles boules toutes numérotées  $k$ .

Par exemple, si on a tiré la boule numéro 3, on remet quatre boules de numéro 3 dans l'urne (la boule tirée plus 3 nouvelles boules numéro 3).

On effectue ensuite un deuxième tirage d'une boule.

On note  $X$  (respectivement  $Y$ ) la variable aléatoire égale au numéro de la boule choisie au premier tirage (respectivement au deuxième tirage).

**III.9.a.** Déterminer la loi de la variable aléatoire  $X$  ainsi que son espérance  $E(X)$ .

**III.9.b.** Déterminer la loi de la variable aléatoire  $Y$  et vérifier que pour tout entier naturel non nul  $k$ ,  $P(Y = k) = \frac{1}{n} \left( \psi(2n+1) - \psi(n+1) + \frac{k}{n+k} \right)$ .

**III.9.c.** Calculer l'espérance  $E(Y)$ . On pourra utiliser, sans démonstration, que

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n(n+k)} = \frac{1-n}{2} + n(\psi(2n+1) - \psi(n+1)).$$

**Fin de l'énoncé**