Centrale 2009. Option MP. Mathématiques I.

Corrigé pour serveur UPS par JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

Partie I. Questions préliminaires.

1) La fonction Γ est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ et prend la même valeur 1 en 1 et en 2 d'où la conclusion par le théorème de Rolle. $\square$

2) Pour tout $x>0$ on a $\Gamma''(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}(\ln t)^2e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}\,t>0$ par le théorème de positivité stricte de l'intégration.
Il en découle que Γ' est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ donc strictement positive sur $[2,+\infty[$ puisqu'elle s'annule en $c<2$. Donc la fonction Γ est strictement croissante sur $[2,+\infty[$ $\square$

3) Vu que $\Gamma(n+1)=n!$, il découle déjà de la question précédente que $\Gamma(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$.
Le résultat demandé est donc évident si $\gamma\leqslant 1$.
Supposons désormais $\gamma>1$ et pour $x\geqslant 2$ notons n_x la partie entière de $x-1$.
Comme les fonctions $x\longmapsto\gamma^x$ et Γ sont croissantes sur $[2,+\infty[$, il vient que $0\leqslant\dfrac{\gamma^x}{\Gamma(x)}\leqslant\dfrac{\gamma^{n_x+2}}{\Gamma(n_x+1)}\underset{\text{DEF}}{=}A(x)$ (1)
Or lorsque $x\to+\infty$ il en va de même de n_x donc lorsque $x\to+\infty$ il vient par la formule de Stirling:
$A(x)\sim\dfrac{\gamma^2}{\sqrt{2\pi}}\times\dfrac{1}{\sqrt{n_x}}\times\left(\dfrac{\gamma e}{n_x}\right)^{n_x}$. Or $\left(\dfrac{\gamma e}{n_x}\right)^{n_x}=e^{-n_x\left(\ln n_x-\ln(\gamma e)\right)}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$. Donc $A(x)$ également.
Il découle alors de (1) que $\gamma^x=o\Big(\Gamma(x)\Big)$ au voisinage de $+\infty$ pour $\gamma>1$.
En conclusion $\gamma^x=o\Big(\Gamma(x)\Big)$ au voisinage de $+\infty$ pour tout réel $\gamma>0$. $\square$

Partie II. Comportement asymptotique de la somme d'une série entière au voisinage de la borne supérieure de son intervalle de convergence.

A.1) Supposons qu'il existe $t_1\geqslant t_0$ telque $\phi(t_1)<0$. Comme ϕ décroît sur $[t_1,+\infty[$, il vient $|\phi(t)|\geqslant|\phi(t_1)|$ pour $t\geqslant t_1$. Par le principe de comparaison des fonctions positives, il en résulte que ϕ n'est pas intégrable en $+\infty$. Contradiction. Ainsi ϕ est positive sur $[t_0,+\infty[$. $\square$

A.2.a) Pour tout entier n tel que $n\geqslant\dfrac{t_0}{h}+1$ il vient que ϕ est positive et décroissante sur $[(n-1)h,nh]$ donc
$0\leqslant h\phi(nh)\leqslant\displaystyle\int_{(n-1)h}^{nh}\phi(t)\,\mathrm{d}\,t$ $\square$

A.2.b) Comme ϕ est intégrable sur $[0,+\infty[$ la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{(n-1)h}^{nh}\phi(t)\,\mathrm{d}\,t$ converge (et a pour somme $\displaystyle\int_0^{+\infty}\phi(t)\,\mathrm{d}\,t$) donc, par le principe de comparaison des séries à termes asyptotiquement positifs, la série $\displaystyle\sum_0^{+\infty}h\phi(nh)$ converge. $\square$

A.3) Soit $\varepsilon>0$ donné quelconque et soit $A>0$ fixé tel que $A>t_0+1$ et $\displaystyle\int_{A-1}^{+\infty}\phi(t)\,\mathrm{d}\,t\leqslant\varepsilon$.

Soit $N_h\underset{\text{DEF}}{=}\left[\dfrac{A}{h}\right]$

- Pour $n\geqslant N_h+1$ et $0<h\leqslant 1$ on a $n\geqslant\dfrac{t_0}{h}+1$. En effet $N_h\geqslant\dfrac{t_0}{h}$ car $N_h\geqslant\dfrac{A}{h}-1\geqslant\dfrac{t_0}{h}+\dfrac{1}{h}-1\geqslant\dfrac{t_0}{h}$.

Donc d'après A.2.a. il vient que $0\leqslant h\phi(nh)\leqslant\displaystyle\int_{(n-1)h}^{nh}\phi(t)\,\mathrm{d}\,t$ pour tout $n\geqslant N_h+1$.

Donc $0\leqslant\displaystyle\sum_{N_h+1}^{+\infty}h\phi(nh)\leqslant\int_{N_hh}^{+\infty}\phi(t)\,\mathrm{d}\,t$ et $0\leqslant\displaystyle\int_{N_hh}^{+\infty}\phi(t)\,\mathrm{d}\,t-\sum_{N_h+1}^{+\infty}h\phi(nh)\leqslant\int_{N_hh}^{+\infty}\phi(t)\,\mathrm{d}\,t\leqslant\varepsilon$

En effet $N_hh\geqslant(\dfrac{A}{h}-1)h=A-h\geqslant A-1$. En conclusion partielle on a donc :

$$\Delta(h)\underset{\text{DEF}}{=}\Big|\int_0^{+\infty}\phi(t)\,\mathrm{d}\,t-\sum_0^{+\infty}h\phi(nh)\Big|\leqslant\varepsilon+\Big|\int_0^{N_hh}\phi(t)\,\mathrm{d}\,t-\sum_0^{N_h}h\Phi(nh)\Big|\quad\forall h\in]0,1]$$

- Or $A-h\leqslant N_hh\leqslant A$ donc $N_hh\xrightarrow[h\to0]{}A$ de sorte que $\displaystyle\int_0^{N_hh}\phi(t)\,\mathrm{d}\,t\xrightarrow[h\to0]{}\int_0^A\phi(t)\,\mathrm{d}\,t$

Par ailleurs $R_h(\phi)=h\displaystyle\sum_{n=0}^{N_h-1}\phi(nh)+(A-N_hh)\phi(N_hh)$ est une somme de Riemann de la fonction ϕ sur $[0,A]$ de module h (car $0\leqslant A-N_hh\leqslant h$) donc tend vers $\displaystyle\int_0^A\phi(t)\,\mathrm{d}\,t$ lorsque h tend vers 0.

Or $\sum_0^{N_h} h\Phi(nh) = R_h(\phi) + (h - A + N_h h)\phi(N_h h)$ et $(h - A + N_h h)\phi(N_h h)$ tend vers $0\phi(A) = 0$ donc $\sum_0^{N_h} h\Phi(nh)$ tend également vers $\int_0^A \phi(t)\,\mathrm{d}\,t$.

Il en découle qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\left|\int_0^{N_h h} \phi(t)\,\mathrm{d}\,t - \sum_0^{N_h} h\Phi(nh)\right| \leqslant \varepsilon$ pour $0 < h \leqslant \alpha$.

- En conclusion $\left|\int_0^{+\infty} \phi(t)\,\mathrm{d}\,t - h\sum_0^{+\infty} \phi(nh)\right| \leqslant 2\varepsilon$ pour $0 < h \leqslant \min(1, \alpha)$.

Ainsi $\lim_{h\to 0^+} h \sum_{n=0}^{+\infty} \phi(nh) = \int_0^{+\infty} \phi(t)\,\mathrm{d}\,t$ $\square$

B.1) Contrairement à ce qui est dit dans l'énoncé on supposera $\alpha \geqslant 1$ (sinon pas de prolongement par continuité en 0) et alors g_α est bien continue et intégrable sur $[0, +\infty[$ (Cf domaine de définition de la fonction Γ). En outre g_α décroît sur $[\alpha - 1, +\infty[$ par calcul de sa dérivée.
Ainsi pour $\alpha \geqslant 1$ la fonction g_α vérifie bien les conditions du II.A. $\square$

En notant que $(-\ln x)$ tend vers 0^+ lorsque $x \to 1^-$, la question précédente montre que :
$\lim_{x\to 1^-} (-\ln x) \sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(-n \ln x) = \int_0^{+\infty} g_\alpha(t)\,\mathrm{d}\,t = \Gamma(\alpha)$ $\square$

Or $g_\alpha(-n\ln x) = (-\ln x)^{\alpha-1} n^{\alpha-1} x^n$ de sorte que $\lim_{x\to 1^-} (-\ln x)^\alpha \sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha-1}x^n = \Gamma(\alpha)$ (1)

B.2) $\dfrac{|(n+1)^{\alpha-1}x^{n+1}|}{|n^{\alpha-1}x^n|} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{\alpha-1} |x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|$ donc par la règle de D'Alembert la série converge pour $|x| < 1$ et diverge pour $|x| > 1$. Ainsi le rayon de convergence de $\sum n^{\alpha-1}x^n$ est égal à 1 $\square$

(1) ci-dessus montre alors que lorsque $x \to 1^-$: $S_\alpha(x) \sim \dfrac{\Gamma(\alpha)}{(-\ln x)^\alpha} \sim \dfrac{\Gamma(\alpha)}{(1-x)^\alpha}$ $\square$

Partie III. La première fonction eulérienne.

A.1) Soient α et β deux réels quelconques et soit $\varphi(t) = t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$.
La foncton φ est continue donc localement intégrable sur $]0, 1[$.
Au voisinage de 0^+ on a $\varphi(t) \sim t^{\alpha-1} \geqslant 0$. Donc φ est intégrable en 0 si et seulement si $t \longmapsto t^{\alpha-1}$ l'est soit si et seulement si $\alpha > 0$.
Au voisinage de 1^- on a $\varphi(t) \sim (1-t)^{\beta-1} \geqslant 0$. Donc φ est intégrable en 1 si et seulement si $t \longmapsto (1-t)^{\beta-1}$ l'est soit si et seulement si $\beta > 0$.
En conclusion $B(\alpha, \beta)$ est défini si et seulement si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. $\square$

A.2) Le changement de variable $t \longmapsto u = (1-t)$ qui est bien un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]0, 1[$ sur lui-même montre immédiatement que $B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$. $\square$

de même le changement de variable $t \longmapsto u = \dfrac{t}{1-t}$ qui est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]0, 1[$ sur $]0, +\infty[$ montre que $B(\alpha, \beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\,\mathrm{d}\,t$ $\square$

Soient a et b tels que $0 < a < b < 1$. Une intégration par parties (en dérivant t^α et en primitivant $(1-t)^{\beta-1}$) fournit : $\displaystyle\int_a^b t^\alpha(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}\,t = \left[-\frac{t^\alpha(1-t)^\beta}{\beta}\right]_a^b + \frac{\alpha}{\beta}\int_a^b t^{\alpha-1}(1-t)^\beta\,\mathrm{d}\,t$
En faisant tendre a vers 0^+ et b vers 1^- il vient (le terme entre crochets tend vers 0 car α et β sont positifs et les intégrales convergent) : $B(\alpha+1, \beta) = \dfrac{\alpha}{\beta} B(\alpha, \beta+1)$ (1)

Or $B(\alpha, \beta+1) = \displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}(1-t)\,\mathrm{d}\,t = B(\alpha, \beta) - B(\alpha+1, \beta)$ (2)
(la linéarisation ci-dessus étant bien licite puisque les deux intégrales $B(\alpha, \beta)$ et $B(\alpha+1, \beta)$ convergent)

(1) et (2) fournissent alors $B(\alpha+1, \beta) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} B(\alpha, \beta)$ $\square$

B.1) Supposons l'assertion vraie en $(\alpha+1, \beta)$ ce qui s'écrit, compte tenu de A.2.(iii) et de $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$: $\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} B(\alpha, \beta) = \dfrac{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}$ soit $B(\alpha, \beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$. Ainsi l'assertion est également vraie en (α, β).
Compte tenu de A.2.(i), si elle est vraie en $(\alpha, \beta+1)$ elle est également vraie en (α, β).

Il en découle que si l'assertion est vraie en $(\alpha+1,\beta+1)$ elle est également vraie en (α,β).

Supposons l'assertion vraie si α et β sont tous deux strictement supérieurs à 2 et soient α et β deux réels quelconques strictement positifs. Alors l'assertion est vraie en $(\alpha+2,\beta+2)$ donc en (α,β) en itérant deux fois le résultat précédent. $\square$

B.2.a) Comme α et β sont strictement supérieurs à 2, $\alpha-1$ et $\beta-1$ sont strictement supérieurs à 1 donc $\psi_{\alpha,\beta}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ donc y est lipschitzienne d'après le théorème des accroissements finis. $\square$

B.2.b) En remarquant que $u_n(\alpha,\beta)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\displaystyle\int_{k/n}^{(k+1)/n}\psi_{\alpha,\beta}(\frac{k}{n})\,\mathrm{d}\,t$, il vient clairement :

$$|B(\alpha,\beta)-u_n(\alpha,\beta)|\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}|\psi_{\alpha,\beta}(t)-\psi_{\alpha,\beta}(\frac{k}{n})|\,\mathrm{d}\,t\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}A_{\alpha,\beta}(t-\frac{k}{n})\,\mathrm{d}\,t=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{A_{\alpha,\beta}}{2n^2}=\frac{A_{\alpha,\beta}}{2n}\quad\square$$

B.2.c) Comme α et β sont strictement plus grands que 2 donc a fortiori que 1, on peut utiliser les résultats de la question II.B.2).

Ainsi pour $x\in[0,1[$ les séries définissant $S_\alpha(x)$ et $S_\beta(x)$ convergent absolument donc leur produit de Cauchy $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_nx^n$ converge vers le produit $S_\alpha(x)S_\beta(x)$.

Or $c_n=\sum\limits_{p+q=n}p^{\alpha-1}q^{\beta-1}=\sum\limits_{k=0}^{n}k^{\alpha-1}(n-k)^{\beta-1}=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\big(\frac{k}{n}\big)^{\alpha-1}\big(1-\frac{k}{n}\big)^{\beta-1}n^{\alpha+\beta-2}=u_n(\alpha,\beta)n^{\alpha+\beta-1}$

Ainsi $S_\alpha(x)S_\beta(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n(\alpha,\beta)n^{\alpha+\beta-1}x^n\quad\forall x\in[0,1[\quad\square$

Donc $S_\alpha(x)S_\beta(x)-B(\alpha,\beta)S_{\alpha+\beta}(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\big(u_n(\alpha,\beta)-B(\alpha,\beta)\big)n^{\alpha+\beta-1}x^n$

Or $\Big|\sum\limits_{n=0}^{N}\big(u_n(\alpha,\beta)-B(\alpha,\beta)\big)n^{\alpha+\beta-1}x^n\Big|\leqslant\dfrac{A_{\alpha,\beta}}{2}\sum\limits_{n=0}^{N}n^{\alpha+\beta-2}x^n\leqslant\dfrac{A_{\alpha,\beta}}{2}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}n^{\alpha+\beta-2}x^n=\dfrac{A_{\alpha,\beta}}{2}S_{\alpha+\beta-1}(x)$

pour tout entier N et tout réel x de $[0,1[$.

Donc $\big|S_\alpha(x)S_\beta(x)-B(\alpha,\beta)S_{\alpha+\beta}(x)\big|\leqslant\dfrac{A_{\alpha,\beta}}{2}S_{\alpha+\beta-1}(x)\quad\forall x\in[0,1[\quad\square$

Multiplions l'inégalité précédente par $(1-x)^{\alpha+\beta}$ qui est bien positif.

Comme α, β, $\alpha+\beta$ et $\alpha+\beta-1$ sont tous strictement plus grands que 1, on peut utiliser le résultat de II.B;2.b).

Ainsi $(1-x)^{\alpha+\beta}S_{\alpha+\beta-1}(x)\sim\Gamma(\alpha+\beta-1)(1-x)$, donc le membre de droite tend vers 0 lorsque $x\to1$.

Par ailleurs $(1-x)^{\alpha+\beta}S_\alpha(x)S_\beta(x)$ tend vers $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$ et $(1-x)^{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta)S_{\alpha+\beta}(x)$ tend vers $B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta)$.

Ainsi le membre de gauche tend d'une part vers $\big|\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)-B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta)\big|$ et d'autre part vers 0.

Donc $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)-B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta)=0$ pour α et β strictement plus grands que 2. $\square$

Mais c'est encore vrai pour $\alpha>0$ et $\beta>0$ d'après III.B.1).

Ainsi $B(\alpha,\beta)=\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\quad\forall\alpha>0\quad\forall\beta>0\quad\square$

C.1) Pour $\alpha\in]0,1[$ on a $\alpha>0$ et $1-\alpha>0$ donc la question précédente fournit $B(\alpha,1-\alpha)=\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$ qui du fait de la continuité de la fonction Γ sur $]0,+\infty[$ est bien une fonction continue de α sur $]0,1[$. $\square$

C.2.a) Posons $\alpha=\dfrac{2p+1}{2q}$ et $\beta=1-\dfrac{2p+1}{2q}$.

Notons bien que $\alpha\in]0,1[$ car p et q sont deux <u>entiers</u> tels que $0<p<q$ (donc $1<2(q-p)$)

Alors III.A.2.(ii) fournit $B(\dfrac{2p+1}{2q},1-\dfrac{2p+1}{2q})=B(\alpha,\beta)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{(2(p-q)+1)/2q}}{1+t}\,\mathrm{d}\,t$

Le changement $t\longmapsto u=t^{1/2q}$ qui est bien un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]0,+\infty[$ sur lui-même montre que la dernière intégrale vaut également $2q\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{u^{2p}}{1+u^{2q}}\,\mathrm{d}\,u\qquad$ (car $\mathrm{d}\,u=t^{1-2q}\,\mathrm{d}\,t$)

Ainsi si p et q sont deux entiers tels que $0<p<q$ alors $B(\dfrac{2p+1}{2q},1-\dfrac{2p+1}{2q})=2q\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\,\mathrm{d}\,t\quad\square$

C.2.b) Notons $\omega=e^{i2\pi/2q}$. Les racines de $X^{2q}+1$ sont $z_\ell=e^{i\pi/2q}\omega^\ell=e^{i(2\ell+1)\pi/2q}$ pour ℓ variant de 0 à $2q-1$

Or $z_{q+\ell}=e^{i\pi}z_\ell=-z_\ell$ pour ℓ variant entre 0 et $q-1$.

Donc $X^{2q}+1=\prod\limits_{k=0}^{q-1}(X-z_k)(X+z_k)$

Comme la partie entière de $\dfrac{P(X)}{Q(X)} = \dfrac{X^{2p}}{X^{2q}+1}$ est nulle du fait que $p < q$, la décomposition en éléments simples de $R(X)$ est de la forme (en tenant compte de la parité) $R(X) = \sum\limits_{k=0}^{q-1} \Big(\dfrac{\alpha_k}{X - z_k} - \dfrac{\alpha_k}{X + z_k} \Big)$ et on sait que $\alpha_k = \dfrac{P(z_k)}{Q'(z_k)}$

Donc $\alpha_k = \dfrac{z_k^{2p}}{2qz_k^{2q-1}} = -\dfrac{z_k^{2p+1}}{2q}$ car $z_k^{2q} = -1$.

Ainsi $\dfrac{X^{2p}}{X^{2q}+1} = -\dfrac{1}{2q} \sum\limits_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1} \Big(\dfrac{1}{X - z_k} - \dfrac{1}{X + z_k} \Big)$ □

C.2.c) On peut le vérifier par simple vérification mais on le retrouve naturellement en écrivant (pour $c = a + ib$ avec $b \neq 0$) que $\dfrac{1}{t-c} = \dfrac{t - a + ib}{(t-a)^2 + b^2} = \dfrac{t-a}{(t-a)^2+b^2} + i\dfrac{b}{(t-a)^2+b^2}$ ce qui fournit immédiatement la primitive donnée. □

En notant $z_k = a_k + ib_k$ il en découle que pour $A > 0$ on a :

$$\begin{aligned}\int_0^A \Big(\frac{1}{t - z_k} - \frac{1}{t+z_k} \Big) \,\mathrm{d}\, t &= \frac{1}{2} \Big[\ln \frac{(t-a_k)^2 + b_k^2}{(t+a_k)^2 + b_k^2} \Big]_0^A + i \Big[\arctan \Big(\frac{t - a_k}{b_k} \Big) + \arctan \Big(\frac{t+a_k}{b_k} \Big) \Big]_0^A \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{(A-a_k)^2 + b_k^2}{(A+a_k)^2 + b_k^2} - 0 + i \Big(\arctan \Big(\frac{A - a_k}{b_k} \Big) + \arctan \Big(\frac{A + a_k}{b_k} \Big) \Big) - 0\end{aligned}$$

Or $b_k = \sin \Big(\dfrac{2k+1}{2q} \pi \Big) > 0$ car $0 \leqslant k \leqslant q-1$ donc en faisant tendre A vers $+\infty$ il vient que :

$$\int_0^{+\infty} \Big(\frac{1}{t - z_k} - \frac{1}{t + z_k} \Big) \,\mathrm{d}\, t = 0 + i \Big(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \Big) = i\pi.$$

La décomposition C.2.b) fournit alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1 + t^{2q}} \,\mathrm{d}\, t = -i \frac{\pi}{2q} \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}$ □

$$\begin{aligned}\text{Or } S = \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1} &= \sum_{k=0}^{q-1} \Big(e^{i(2p+1)\pi/2q} \Big)^{2k+1} = e^{i(2p+1)\pi/2q} \sum_{k=0}^{q-1} \Big(e^{i(2p+1)\pi/q} \Big)^k = e^{i(2p+1)\pi/2q} \frac{1 - e^{i(2p+1)\pi}}{1 - e^{i(2p+1)\pi/q}} \\ &= 2 \frac{e^{i(2p+1)\pi/2q}}{1 - e^{i(2p+1)\pi/q}} = \frac{2}{e^{-i(2p+1)\pi/2q} - e^{i(2p+1)\pi/2q}} = \frac{-i}{\sin\big((2p+1)\pi/2q \big)}\end{aligned}$$

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1 + t^{2q}} \,\mathrm{d}\, t = \frac{\pi}{2q \sin\big((2p+1)\pi/2q \big)}$ □

C.3) Pour tout réel α de $]0, 1[$ de la forme $\alpha = \dfrac{2p+1}{2q}$ avec p et q entiers on a comptetenu de ce qui précède :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = B(\alpha, 1-\alpha) = 2q \int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1 + t^{2q}} \,\mathrm{d}\, t = \frac{\pi}{\sin\big((2p+1)\pi/2q \big)} = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} \quad (1)$$

Or l'ensemble des réels de la forme $\dfrac{2p+1}{2q}$ avec p et q entiers est dense dans $\mathbb{R}^+$. En effet soient a et b réels tels que $0 < a < b$, q un entier tel que $\dfrac{1}{q} < b - a$ et $\dfrac{1}{2q} \leqslant a$ et soit p le plus grand entier tel que $\dfrac{2p+1}{2q} \leqslant a$ (cet entier existe bien puisque $\dfrac{1}{2q} \leqslant a$). Alors $a < \dfrac{2p+3}{2q} < b$ clairement compte tenu du choix de q et de p ce qui prouve bien la densité annoncée.

Il en découle naturellement que si on se restreint aux entiers tels que $0 < p < q$ on obtient un ensemble dense dans $]0, 1[$.

Compte tenu de (1) et de la continuité de la fonction $\alpha \longmapsto \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$ on obtient la formule des compléments

$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} \quad \forall \alpha \in]0, 1[$ □

Partie IV. L'opérateur d'Abel.

A.1.) $t \longmapsto \varphi(t) = \dfrac{f(t)}{(x-t)^\alpha}$ est continue donc localement intégrable sur $[0, x[$. En outre $|\varphi(t)| \leqslant \dfrac{\|f\|}{(x-t)^\alpha}$ ce qui prouve son caractère intégrable en x^- (donc sur $[0, x[$) puisque $\alpha < 1$. □

A.2.a) Pour $x \in]0, 1]$, le changement $t \longmapsto u = t/x$ qui est un $\mathcal{C}^1$- difféomorphisme de $]0, x[$ sur $]0, 1[$ montre que $A_\alpha f(x) = x^{1-\alpha} \displaystyle\int_0^1 \frac{f(xu)}{(1-u)^\alpha} \,\mathrm{d}\, u$. Résultat encore vrai si $x = 0$ car $0^{1-\alpha} = 0$ puisque $\alpha < 1$.

Ainsi $A_\alpha f(x) = x^{1-\alpha} \displaystyle\int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha} \,\mathrm{d}\, t \quad \forall x \in [0, 1]$ □

A.2.b) Il suffit de prouver que $x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{d}\,t$ est continue sur $[0,1]$. Notons $g(x,t) = \dfrac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}$. Alors :

- $x \longmapsto g(x,t)$ est continue sur $[0,1]$ pour tout $t \in]0,1[$
- $t \longmapsto g(x,t$ est continue (donc a fortiori par morceaux) sur $]0,1[$ pour tout $x \in [0,1]$
- $|g(x,t)| \leqslant g(t) = \dfrac{\|f\|}{(1-t)^\alpha}$ pout tout $(x,t) \in [0,1] \times]0,1[$ et g est bien intégrable sur $]0,1[$

Le théorème de continuité de Lebesgue d'une intégrale à paramètre prouve alors le résultat. □

A.2.c) Il en découle que A_α est bien une application de E dans E. Elle est clairement linéaire.
Par ailleurs pour $f \in E$ et $x \in [0,1]$:

$$|A_\alpha f(x)| \leqslant x^{1-\alpha} \int_0^1 \frac{\|f\|}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{d}\,t = x^{1-\alpha}\|f\| \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,u}{u^\alpha} = x^{1-\alpha}\frac{\|f\|}{1-\alpha} \leqslant \frac{\|f\|}{1-\alpha} \quad (1)$$

Donc $\|A_\alpha f\| \leqslant \dfrac{\|f\|}{1-\alpha}$ ce qui prouve que A_α est continue et que $|||A_\alpha||| \leqslant \dfrac{1}{1-\alpha}$

En outre avec la fonction f_0 constante égale à 1 qui appartient à la sphère unité de E, il vient $A_\alpha f_0(x) = \dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ donc $\|A_\alpha f_0\| = \dfrac{1}{1-\alpha}$ ce qui prouve que $|||A_\alpha||| \geqslant \dfrac{1}{1-\alpha}$.

En conclusion $A_\alpha \in L_c(E)$ et $|||A_\alpha||| = \dfrac{1}{1-\alpha}$ □

B.1.a) L'inégalité proposée est vraie pour $n = 1$ car $\dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1+\beta)} = \dfrac{1}{\beta} = \dfrac{1}{1-\alpha}$ et on retrouve l'avant dernière inégalité établie au (1) ci-dessus.
Supposons l'inégalité vraie jusqu'au rang $n-1$ avec $n \geqslant 2$. En notant que $A_\alpha^n f(x) = A_\alpha g(x)$ avec $g(x) = A_\alpha^{n-1} f(x)$ il vient que $|A_\alpha^n f(x)| \leqslant x^\beta \displaystyle\int_0^1 \frac{|g(xt)|}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{d}\,t$.

Or par hypothèse de récurrence on a $|g(xt)| \leqslant \dfrac{(xt)^{(n-1)\beta}\Gamma^{n-1}(\beta)}{\Gamma(1+(n-1)\beta)}\|f\|$ Donc :

$$|A_\alpha^n f(x)| \leqslant x^{n\beta}\|f\| \times \frac{\Gamma^{n-1}(\beta)}{\Gamma(1+(n-1)\beta)} \times \int_0^1 \frac{t^{(n-1)\beta}}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{d}\,t$$

Or la dernière intégrale n'est autre que $B\big(1+(n-1)\beta, \beta\big)$ soit $\dfrac{\Gamma(1+(n-1)\beta)\Gamma(\beta)}{\Gamma(1+n\beta)}$ d'après la partie III.B.

Finalement on obtient bien $|A_\alpha^n f(x)| \leqslant \dfrac{x^{n\beta}\Gamma^n(\beta)}{\Gamma(1+n\beta)}\|f\|$ et l'inégalité est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$ par récurrence.
□

B.1.ba) A_α^n est évidemment continu en tant que composé d'endomorphismes continus et l'inégalité ci-dessus montre que $\|A_\alpha^n f\| \leqslant \dfrac{\Gamma^n(\beta)}{\Gamma(1+n\beta)}\|f\|$ donc que $|||A_\alpha^n||| \leqslant \dfrac{\Gamma^n(\beta)}{\Gamma(1+n\beta)}$ □

B.2. Soit $\gamma > 0$ donné quelconque. Notons $a = \gamma\Gamma(\beta)$ et $b = a^{1/\beta}$.
Il vient $\gamma^n \dfrac{\Gamma^n(\beta)}{\Gamma(1+n\beta)} = \dfrac{1}{n\beta} \times \dfrac{a^n}{\Gamma(n\beta)} = \dfrac{1}{n\beta} \times \dfrac{b^{n\beta}}{\Gamma(n\beta)}$.
Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b^{n\beta}}{\Gamma(n\beta)} = 0$ d'après I.3) donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \gamma^n \frac{\Gamma^n(\beta)}{\Gamma(1+n\beta)} = 0 \quad \forall\gamma > 0$ □

B.3.a) D'après B.1) et B.2) on a $\gamma^n\|A_\alpha^n f\| = o(1)$ lorsque $n \to +\infty$.
Donc $\|\lambda^n A_\alpha^n f\| = \dfrac{1}{2^n} \times (2|\lambda|)^n \|A_\alpha^n f\| = o\Big(\dfrac{1}{2^n}\Big)$
Ce qui prouve la convergence normale donc uniforme de la série sur $[0,1]$. □

B.3.b) La suite $g_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \lambda^n A_\alpha^n f$ converge donc uniformément vers g c'est à dire pour la norme uniforme sur $[0,1]$, norme pour laquelle A_α est continu. Donc $\lambda A_\alpha(g_N)$ converge (uniformément) vers $\lambda A_\alpha(g)$ c'est à dire $\displaystyle\sum_{n=1}^{N+1} \lambda^n A_\alpha^n f$ converge vers $\lambda A_\alpha(g)$ en d'autres termes $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n f = \lambda A_\alpha(g)$.
Il en découle que $\big(Id_E - \lambda A_\alpha\big)g = f$. □

B.3.b) On prouverait exactement de la même manière que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n f = g(\lambda A_\alpha)$ donc que $g\big(Id_E - \lambda A_\alpha\big) = f$

Ainsi $Id_E - \lambda A_\alpha$ est inversible et $\big(Id_E - \lambda A_\alpha\big)^{-1} = g = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n$. $\square$

C.1.a) $A_\alpha e_n(x) = x^{1-\alpha} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n t^n}{(1-t)^\alpha} \,\mathrm{d}\, t = x^{n+1-\alpha} B(n+1, 1-\alpha) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(n+2-\alpha)} x^{n+1-\alpha}$

Ainsi $A_\alpha e_n = \dfrac{\Gamma(n+1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(n+2-\alpha)} e_{n+1-\alpha}$ $\square$ (en prolongeant la définition de e_n à n réel)

C.1.b) Donc $\big(A_{1-\alpha} o A_\alpha\big) e_n = \dfrac{\Gamma(n+1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(n+2-\alpha)} A_{1-\alpha} e_{n+1-\alpha} = \dfrac{\Gamma(n+1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(n+2-\alpha)} \times \dfrac{\Gamma(n+2-\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n+2)} e_{n+1}$

$= \dfrac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2)} \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) e_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} \dfrac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} e_{n+1}$ $\square$

C.2) Immédiat par linéarité. $\square$

C.3.a) Pour $f \in E$ et $x \in [0,1]$ on a $|Pf(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^x \|f\| \,\mathrm{d}\, t = x\|f\| \leqslant \|f\|$ donc $\|Pf\| \leqslant \|f\|$ ce qui prouve que P (qui est clairement un endomorphisme de E) est continu et que $|||P||| \leqslant 1$.
En outre en considérant f_0 qui appartient à la sphère unité de E on a $Pf_0(x) = x$ donc $\|Pf_0\| = 1$ ce qui prouve que $|||P||| \geqslant 1$.
Finalement $|||P||| = 1$ $\square$

C.3.b) D'après la question C.2) les endomorphismes continus B_α et $\dfrac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} P$ coincident sur l'ensemble des fonctions polyniomiales sur $[0,1]$ qui est dense dans E par le théorème de Wierstrass. Donc ils coincident sur E. $\square$

C.3.c) $B_\alpha f(x) = \dfrac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} \displaystyle\int_0^x f(t) \,\mathrm{d}\, t$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ en tant qu'intégrale de sa borne supérieure d'une fonction continue et $\Big((D o B_\alpha) f\Big)(x) = \dfrac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} f(x)$ donc $D o B_\alpha = \dfrac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} Id_E$ $\square$

C.3.d) Soit $f \in \operatorname{Ker} A_\alpha$. Alors a fortiori $f \in \operatorname{Ker}\big(D o A_{1-\alpha} o A_\alpha\big) = \dfrac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} Id_E$ donc f est nulle.

Ainsi A_α est injectif. $\square$

FIN