

Préparation aux Concours (CCP)

Fonctions de Riemann

Les calculatrices sont autorisées

Notations

On note E l'espace vectoriel normé des applications continues du segment $[0, 1]$ dans \mathbb{C} muni de la norme $f \mapsto \|f\| = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(x)|$ et $L(E)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans lui-même. Soient v un élément de $L(E)$ et f un élément de E ; l'image de f par v est notée vf . L'espace $L(E)$ est muni de la norme $v \mapsto \|v\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|v(f)\|$.

Le problème se propose d'étudier quelques propriétés d'un opérateur appliquant E dans lui-même qui est introduit dans la troisième partie. Pour ce faire, dans les deux premières parties, on met en place les outils nécessaires à cette étude.

Rappels

La deuxième fonction eulérienne notée Γ est la fonction réelle définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par la formule suivante :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Cette fonction est indéfiniment dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et pour tout entier naturel k et tout nombre réel $x > 0$,

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k e^{-t} t^{x-1} dt.$$

De plus, pour tout $x > 0$, cette fonction vérifie l'équation

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Comme $\Gamma(1) = 1$, il en découle que, pour tout entier naturel n ,

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Partie I - Questions préliminaires

- I.1) Montrer qu'il existe un réel c de l'intervalle $]1, 2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$.
 I.2) En déduire que la fonction Γ est strictement croissante sur l'intervalle $[2, +\infty[$.
 I.3) Montrer que, pour tout nombre réel $\gamma > 0$,
- $$\gamma^x = o(\Gamma(x)) \text{ au voisinage de } +\infty.$$

Partie II - Comportement asymptotique de la somme d'une série entière au voisinage de la borne supérieure de son intervalle de convergence

II.A - Soit ϕ une application continue de l'intervalle $[0, +\infty[$ dans \mathbb{R} , intégrable sur l'intervalle $[0, +\infty[$. On suppose de plus qu'il existe un nombre réel $t_0 \geq 0$ tel que la fonction ϕ soit décroissante sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$.

II.A.1) Établir que la fonction ϕ est positive sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$.
 (On pourra raisonner par l'absurde).

II.A.2) Soit h un nombre réel strictement positif.

a) Prouver que pour n suffisamment grand, $0 \leq h\phi(nh) \leq \int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t) dt$.

b) Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh)$ converge.

II.A.3) Prouver que :

$$\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} h \sum_{n=0}^{+\infty} \phi(nh) = \int_0^{+\infty} \phi(t) dt.$$

(On pourra introduire un nombre réel a suffisamment grand et écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh) = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{a}{h} \rfloor} h\phi(nh) + \sum_{n=\lfloor \frac{a}{h} \rfloor + 1}^{+\infty} h\phi(nh)$$

où $\lfloor \frac{a}{h} \rfloor$ désigne la partie entière du nombre réel $\frac{a}{h}$).

II.B - Pour tout nombre réel $\alpha > 0$, on note g_α la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par la formule $g_\alpha(t) = e^{-t}t^{\alpha-1}$.

II.B.1) Vérifier que la fonction g_α satisfait aux conditions du II.A.
En déduire que

$$\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} (-\ln x) \sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(-n \ln x) = \Gamma(\alpha).$$

II.B.2) On considère la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha-1} x^n$.

a) Établir que le rayon de convergence de cette série entière est égal à 1. On note S_α la somme de cette série entière.

b) Prouver que, lorsque x tend vers 1 avec $x < 1$, alors :

$$S_\alpha(x) \sim \frac{\Gamma(\alpha)}{(1-x)^\alpha}.$$

Partie III - La première fonction eulérienne

III.A -

III.A.1) Établir que, pour tout couple (α, β) de nombres réels strictement positifs, la fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, 1[$.

Pour tout couple (α, β) de nombres réels strictement positifs, on pose :

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt.$$

III.A.2) Prouver successivement pour tout couple (α, β) de réels strictement positifs, les relations suivantes :

$$(i) \quad B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$$

$$(ii) \quad B(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}} dt$$

(on pourra utiliser le changement de variable $u = \frac{t}{1-t}$.)

$$(iii) \quad B(\alpha + 1, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} B(\alpha, \beta).$$

III.B - On se propose d'établir pour tout réel $\alpha > 0$ et tout réel $\beta > 0$ la formule suivante :

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

III.B.1) À l'aide de la relation (iii) montrer qu'il suffit de prouver l'assertion lorsque les réels α et β sont strictement supérieurs 2.

III.B.2) Soient α et β deux nombres réels strictement supérieurs à 2. Pour tout entier n strictement positif, on pose :

$$u_n(\alpha, \beta) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{\beta-1}$$

a) Établir que la fonction $\psi_{\alpha, \beta} : t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est lipschitienne sur le segment $[0, 1]$.

On note $A_{\alpha, \beta}$ un rapport de Lipschitz de cette fonction, c'est-à-dire tel que :

$$\forall x, y \in [0, 1], |\psi_{\alpha, \beta}(x) - \psi_{\alpha, \beta}(y)| \leq A_{\alpha, \beta} |x - y|.$$

b) Prouver que, pour tout entier n strictement positif :

$$|u_n(\alpha, \beta) - B(\alpha, \beta)| \leq \frac{A_{\alpha, \beta}}{2n}.$$

c) On reprend les notations de la question (II.B.2).

Établir que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0, 1[$:

$$S_\alpha(x)S_\beta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\alpha, \beta) n^{\alpha+\beta-1} x^n.$$

Déduire de la question 2.b) que, pour tout réel x , $0 \leq x < 1$,

$$|S_\alpha(x)S_\beta(x) - B(\alpha, \beta)S_{\alpha+\beta}(x)| \leq \frac{A_{\alpha, \beta}}{2} S_{\alpha+\beta-1}(x).$$

En utilisant le comportement des fonctions $(S_\gamma)_{\gamma>0}$ au voisinage du point 1, conclure que :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = B(\alpha, \beta)\Gamma(\alpha + \beta).$$

III.C - Formule des compléments

III.C.1) Établir que la fonction $\alpha \mapsto B(\alpha, 1 - \alpha)$ est continue sur l'intervalle $]0, 1[$.

III.C.2) Soient p et q deux entiers tels que $0 < p < q$.

a) Vérifier que :

$$B\left(\frac{2p+1}{2q}, 1 - \frac{2p+1}{2q}\right) = 2q \int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}} dt.$$

b) Pour tout entier k compris entre 0 et $q - 1$, on note :

$$z_k = e^{i\frac{2k+1}{2q}\pi}.$$

Établir que :

$$(*) \quad \frac{X^{2p}}{1 + X^{2q}} = -\frac{1}{2q} \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1} \left(\frac{1}{X - z_k} - \frac{1}{X + z_k} \right).$$

c) Après avoir vérifié que, pour tout nombre complexe c de partie imaginaire non nulle, la fonction $t \mapsto \frac{1}{2} \ln \left((t - \operatorname{Re}c)^2 + (\operatorname{Im}c)^2 \right) + i \arctan \left(\frac{t - \operatorname{Re}c}{\operatorname{Im}c} \right)$ est une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t - c}$, prouver en utilisant judicieusement la relation (*) que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1 + t^{2q}} dt = -i \frac{\pi}{2q} \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}$$

En conclure que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1 + t^{2q}} dt = \frac{\pi}{2q} \frac{1}{\sin\left(\frac{2p+1}{2q}\pi\right)}.$$

III.C.3) Dédurre de (III.C.1) et (III.C.2) que :

$$\forall \alpha \in]0, 1[, B(\alpha, 1 - \alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}.$$

Partie IV - L'opérateur d'Abel

Dans toute cette dernière partie, on suppose que α est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0, 1[$.

IV.A -

IV.A.1) Établir que pour toute fonction f de E et pour tout réel x de l'intervalle $]0, 1[$, la fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{(x - t)^\alpha}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, x[$.

IV.A.2) Pour tout élément f de E , on note $A_\alpha f$ la fonction définie sur le segment $[0, 1]$ par les formules suivantes :

$$A_\alpha f(x) = 0 \quad \text{si } x = 0$$

$$A_\alpha f(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt \quad \text{si } 0 < x \leq 1.$$

a) Vérifier que, pour tout f élément de E et tout réel x du segment $[0, 1]$,

$$A_\alpha f(x) = x^{1-\alpha} \int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha} dt.$$

b) Montrer que, pour tout élément f de E , la fonction $A_\alpha f$ est une fonction continue sur le segment $[0, 1]$.

c) Établir que l'application $A_\alpha : f \mapsto A_\alpha f$ est un endomorphisme continu de l'espace vectoriel normé E et que :

$$\|A_\alpha\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|A_\alpha f\| = \frac{1}{1-\alpha}.$$

IV.B - On définit la suite $(A_\alpha^n)_{n \geq 0}$ par la condition initiale $A_\alpha^0 = id_E$ (application identité de E) et, pour tout $n \geq 0$, par la relation de récurrence suivante :

$$A_\alpha^{n+1} = A_\alpha \circ A_\alpha^n.$$

IV.B.1) On pose $\beta = 1 - \alpha$.

a) Pour tout entier $n \geq 1$, pour tout f élément de E et pour tout x du segment $[0, 1]$ établir l'inégalité suivante :

$$|A_\alpha^n f(x)| \leq \frac{x^{n\beta} (\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|.$$

b) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, A_α^n est un endomorphisme continu de E et que :

$$\|A_\alpha^n\| \leq \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}.$$

IV.B.2) Pour tout nombre réel positif γ , montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma^n \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} = 0.$$

On pourra utiliser le résultat de la question préliminaire I.3.

IV.B.3) Soient λ un nombre complexe non nul et f un élément de E .

a) Prouver que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n f$ converge uniformément sur le segment $[0, 1]$.

On note g la somme de cette série de fonctions.

b) Prouver que :

$$(id_E - \lambda A_\alpha)g = f.$$

c) En déduire que, pour tout nombre complexe λ non nul, l'opérateur $id_E - \lambda A_\alpha$ est inversible et que :

$$(id_E - \lambda A_\alpha)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n$$

où $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n$ désigne l'application $f \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n(f)$.

IV.C - Pour tout entier naturel n , on note e_n la fonction monômiale $t \mapsto t^n$.

IV.C.1) Soit n un entier naturel.

a) Calculer $A_\alpha e_n$.

b) En déduire que :

$$(A_{1-\alpha} \circ A_\alpha)e_n = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \frac{e_{n+1}}{n+1}.$$

IV.C.2) Ce résultat suggère d'introduire l'opérateur P défini sur E par la formule suivante :

$$\forall x \in [0, 1], Pf(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Ainsi, avec cette notation, pour tout entier naturel n ,

$$(A_{1-\alpha} \circ A_\alpha)e_n = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} P e_n.$$

Établir que pour toute fonction polynômiale ψ ,

$$(A_{1-\alpha} \circ A_\alpha)\psi = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} P\psi.$$

IV.C.3) Formule d'inversion d'Abel.

a) Montrer que l'endomorphisme P est un endomorphisme continu de E tel que :

$$\|P\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|Pf\| = 1.$$

b) On pose $B_\alpha = A_{1-\alpha} \circ A_\alpha$. Montrer que :

$$B_\alpha = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} P.$$

c) Soit D l'opérateur qui à toute application continûment dérivable de $[0, 1]$ dans \mathbb{C} associe sa dérivée.

Montrer que $D \circ B_\alpha$ est bien défini et que :

$$D \circ B_\alpha = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} id_E.$$

d) En déduire que l'opérateur A_α est injectif.

••• FIN •••
