

Séries Numériques

INTRODUCTION

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par :

$$a_n = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t}.$$

On étudie la série de terme général a_n . On montre qu'elle est convergente et on donne différentes représentations de sa somme, notée γ , et appelée **Constante d'Euler**. Pour cela on commence par étudier la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$S_n = \sum_{p=1}^n a_p = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \ln(n+1).$$

On s'intéresse également à la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $H_0 = 0$ et pour tout entier $n \geq 1$,

$$H_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}.$$

PARTIE I : PREMIÈRE APPROCHE DE LA CONSTANTE D'EULER

1) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. En encadrant l'intégrale $\int_p^{p+1} \frac{dt}{t}$, montrer que

$$0 \leq a_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

2) En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée, puis qu'elle est convergente et que sa limite γ appartient à l'intervalle $[0, 1]$.

3) Vérifier que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$a_p = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{t}{t+p} dt,$$

puis montrer que pour tout entier $p \geq 2$ on a :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) \leq a_p \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right).$$

4) En déduire un encadrement de $S_m - S_n$ pour m et n des entiers vérifiant $m > n \geq 1$. Puis montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$\frac{1}{2n+2} \leq \gamma - S_n \leq \frac{1}{2n}.$$

5) Conclure qu'on a le développement asymptotique suivant pour la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$:

$$H_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $T_n = S_n + \frac{1}{2n+2}$. Montrer que

$$0 \leq \gamma - T_n \leq \frac{1}{2n(n+1)}.$$

7) Déterminer un entier $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel T_n est une valeur approchée de γ à 10^{-2} près. Donner alors un encadrement de γ à 10^{-2} près.

PARTIE II : DEUX REPRÉSENTATIONS INTÉGRALES DE LA CONSTANTE D'EULER

Soit I un intervalle non vide de \mathbb{R} , borné ou non et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On dira que f est **intégrable** sur I si l'intégrale impropre de f sur I est absolument convergente.

On admettra le résultat suivant : Soit I un intervalle non vide de \mathbb{R} , borné ou non et soit $\sum u_n$ une série de fonctions réelles positives, définies, continues par morceaux et intégrables sur l'intervalle I . Si la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I vers une fonction continue par morceaux et si la série numérique $\sum \int_I u_n$ converge, alors, la fonction somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est intégrable sur I et on a :

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n$$

1) Dans cette question, on se propose de démontrer la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt.$$

a) Montrer que les deux intégrales suivantes sont convergentes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

b) Déterminer la limite de $\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}$ quand $t \rightarrow 0^+$.

c) Conclure.

2) Dans cette question on se propose de démontrer que si a et b sont deux réels strictement positifs, alors la fonction $t \mapsto \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \ln \frac{b}{a}.$$

Soient x et y deux réels strictement positifs.

a) Démontrer que :

$$\int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

b) Montrer que pour $a \leq b$ on a pour tout réel $z > 0$:

$$e^{-bz} \ln \frac{b}{a} \leq \int_{az}^{bz} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq e^{-az} \ln \frac{b}{a}$$

c) Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \ln \frac{b}{a}.$$

3) Une première représentation intégrale de la constante d'Euler.

a) Démontrer que pour tout réel $t > 0$ on a :

$$\frac{1}{1-e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} \quad \text{et} \quad \frac{1}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t} \right).$$

b) En déduire que pour tout réel $t > 0$ on a :

$$e^{-t} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-(n+1)t} - \frac{e^{-(n+1)t} - e^{-(n+2)t}}{t} \right).$$

c) Démontrer que pour tout réel $t > 0$, on a :

$$1 - \frac{1 - e^{-t}}{t} \geq 0.$$

d) Retrouver alors la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt$ et démontrer l'égalité :

$$\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt.$$

4) Une deuxième représentation intégrale de la constante d'Euler.

Soit y un réel strictement positif.

a) Calculer $\int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt$, puis déduire que

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt \right) = 0.$$

b) Démontrer que :

$$\gamma + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_0^y e^{-t} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt.$$

c) En déduire que :

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\gamma + \ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right) = 0.$$

d) Démontrer que la fonction $t \mapsto e^{-t} \ln t$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(e^{-y} \ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right).$$

e) Conclure alors que :

$$\gamma = - \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt.$$

PARTIE III : POUR UNE VALEUR APPROCHÉE DE LA CONSTANTE D'EULER

1) a) Démontrer l'égalité suivante :

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} \right) dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt.$$

(Indication : on pourra calculer chacune des deux intégrales).

b) En utilisant l'égalité obtenue en II.3)d), démontrer que :

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

2) Soit F la fonction définie par $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} x^k$.

(On rappelle que $H_0 = 0$ et pour $k \geq 1$, $H_k = \sum_{p=1}^k \frac{1}{p}$.)

a) Montrer que F est définie et dérivable sur \mathbb{R} .

b) Démontrer que pour tout réel $x > 0$ on a :

$$F'(x) - F(x) = \frac{1}{x}(e^x - 1).$$

c) Montrer alors que pour tout réel $x > 0$ on a :

$$F(x) = e^x \int_0^x \frac{1 - e^{-t}}{t} dt.$$

3) Dédire des questions précédentes que pour tout réel $x > 0$ on a :

$$\gamma + \ln x = e^{-x} F(x) - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

4) Soit un entier $n \geq 1$ et soit un entier $a \geq 2$. Montrer que :

$$\sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} n^k \leq \frac{n^{an+1}}{(an)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^k \leq \frac{a}{a-1} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}} \left(\frac{e}{a}\right)^{an}.$$

(**Indication** : on pourra admettre et utiliser l'inégalité : $n! \geq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.)

5) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$\left| \gamma + \ln n - e^{-n} \sum_{k=0}^{an} \frac{H_k}{k!} n^k \right| \leq \frac{a}{a-1} \frac{e^{-n} \sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}} \left(\frac{e}{a}\right)^{an} + \frac{e^{-n}}{n}.$$

6) Décrire une méthode permettant le calcul d'une valeur approchée de γ à 10^{-10} près. (On ne demande pas le calcul d'une telle valeur approchée.)

PARTIE IV : LA CONSTANTE D'EULER SOMME DE LA SÉRIE DE VACCA (1910)

Pour tout entier $p \geq 0$, on pose :

$$v_p = p \left(\sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{(-1)^k}{k} \right).$$

1) a) En séparant les termes d'indices pairs et ceux d'indices impairs dans l'expression de v_p , montrer que pour tout entier $p \geq 1$ on a :

$$v_p = p(\sigma_{p-1} - \sigma_p) \quad \text{où} \quad \sigma_p = \sum_{h=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{h}.$$

b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$\sum_{p=1}^n v_p = \sum_{p=0}^{n-1} \sigma_p - n\sigma_n.$$

c) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$\sum_{p=0}^{n-1} \sigma_p = H_{2^n} - \frac{1}{2^n}.$$

d) En utilisant le développement asymptotique de H_n , obtenu en **I. 5**), conclure que la série de terme général v_p est convergente et qu'on a :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} v_p = \gamma.$$

2) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = (-1)^n \frac{\lfloor \log_2 n \rfloor}{n}$$

où \log_2 désigne la fonction logarithme en base 2 et $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x .

a) Expliquer pourquoi le critère spécial des séries alternées ne permet pas de montrer la convergence de la série de terme général u_n .

b) Soit n un entier naturel et soit m un entier tel que : $2^{n+1} \leq m < 2^{n+2}$. Montrer que

$$\left| \sum_{k=2^{n+1}}^m \frac{(-1)^k}{k} \right| \leq \frac{1}{2^n},$$

puis en déduire que :

$$\left| \sum_{k=2^{n+1}}^m u_k \right| \leq \frac{n+1}{2^n}.$$

c) Soit n un entier naturel et soit m un entier tel que : $2^{n+1} \leq m < 2^{n+2}$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^m u_k = \sum_{p=0}^n v_p + \mathcal{O}\left(\frac{n}{2^n}\right)$$

et en déduire que la série de terme général u_n converge et que l'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \gamma.$$

3) On pose pour tout entier naturel n :

$$r_n = \sum_{k=2^n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

a) Montrer que la série de terme général r_n est absolument convergente.

b) Exprimer v_k en fonction de k, r_k et r_{k+1} . Montrer ensuite que

$$\sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^n r_k - nr_{n+1}.$$

Conclure que :

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=2^n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{2^n + j} \right)$$

PARTIE V : LA FORMULE DE GOSPER (1972)

Dans cette partie on désigne par \mathcal{F} le \mathbb{R} -espace vectoriel des suites réelles indexées par \mathbb{N} . Si $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un élément de \mathcal{F} , on notera aussi $x[k]$ le terme x_k de la suite x . On considère l'endomorphisme Δ de \mathcal{F} défini par :

$$\forall x \in \mathcal{F}, \forall k \in \mathbb{N}, \Delta(x)[k] = x[k] - x[k+1].$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note Δ^n l'endomorphisme de \mathcal{F} obtenu en composant Δ avec lui même n fois et on pose $\Delta^0 = \text{Id}_{\mathcal{F}}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et pour tout entier $p \in [0, n]$, $\binom{n}{p}$ désigne le coefficient binomial :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

1) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathcal{F}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$\Delta^n(x)[k] = \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{n}{p} x_{p+k}.$$

(**Indication** : écrire $\Delta = \text{Id}_{\mathcal{F}} - T$ où T est l'endomorphisme de \mathcal{F} défini, pour tout $x \in \mathcal{F}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, par : $T(x)[k] = x[k+1]$.)

2) Soit $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergente et de limite ℓ . On se propose de montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} u_p = \ell.$$

a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $\left(\frac{\binom{n}{p}}{2^n} \right)_{n \geq p}$ converge vers 0.

b) On suppose dans cette question $\ell = 0$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} u_p = 0.$$

(**Indication** : On pourra utiliser l'égalité suivante :

$$\frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} u_p = \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^k \binom{n}{p} u_p + \frac{1}{2^n} \sum_{p=k+1}^n \binom{n}{p} u_p$$

et, étant donnée un réel $\varepsilon > 0$, choisir un entier k suffisamment grand pour que l'on ait

$$\left| \frac{1}{2^n} \sum_{p=k+1}^n \binom{n}{p} u_p \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

c) Conclure pour le cas général où ℓ est quelconque.

- 3) Dans cette question, on se propose de démontrer la propriété suivante : Soit $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$. Si la série $\sum (-1)^k x_k$ converge, alors, la série de terme général $\frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}$ converge et on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x_k = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}.$$

On pose, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$U_N = \sum_{k=0}^N (-1)^k x_k \quad \text{et} \quad V_N = \sum_{n=0}^N \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}.$$

a) Démontrer que

$$V_N = \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{q=0}^N \binom{N+1}{q} U_q.$$

(on pourra observer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(-1)^k x_k = U_k - U_{k-1}$, avec, par convention, $U_{-1} = 0$).

b) En déduire que la série de terme général $\frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}$ converge et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x_k.$$

- 4) On considère dans cette question un entier $n \geq 1$ ainsi que la suite $x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$x_j = \frac{1}{2^n + j}.$$

a) Montrer que pour tout entier $m \geq 0$ on a :

$$\Delta^m(x)[0] = \frac{1}{2^n} \frac{1}{\binom{2^n+m}{m}}.$$

Indication : On pourra admettre et utiliser le résultat suivant : Pour $m, n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\int_0^1 x^n (1-x)^m dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

b) En déduire que :

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m+n+1}} \frac{1}{\binom{2^n+m}{m}}.$$

c) Conclure que la constante d'Euler peut s'écrire :

$$\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{p+1}} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{\binom{2^{p-k}+k}{k}}.$$

CORRIGÉ DM N°11

Partie I : Première approche de la constante d'Euler

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[p, p+1]$ donc $\forall t \in [p, p+1], \frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{p}$.

En intégrant cette inégalité entre p et $p+1$, on obtient : $\frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{p}$ soit $-\frac{1}{p} \leq -\int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \leq -\frac{1}{p+1}$
et finalement

$$0 \leq a_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$$

2. • En additionnant les inégalités précédents pour p variant de 1 à n , on obtient

$$0 \leq \sum_{p=1}^n a_p \leq \sum_{p=1}^n \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \leq 1$$

Donc la suite (S_n) est majorée.

- $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geq 0$ donc la suite (S_n) est croissante ; étant majorée, elle converge, vers une limite notée γ .
- De l'encadrement $0 \leq S_n \leq 1$ trouvé ci-dessus, on déduit immédiatement $0 \leq \gamma \leq 1$.

3. $a_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} = \frac{1}{p} - \int_0^1 \frac{du}{u+p}$ en faisant le changement de variable $t = u+p$.

$$\text{D'où } a_p = \frac{1}{p} \int_0^1 \left(1 - \frac{p}{u+p} \right) du = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{u}{u+p} du.$$

Pour $u \in [0, 1]$, $\frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{u+p} \leq \frac{1}{p}$ donc, d'après le calcul ci-dessus :

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p+1} \cdot \int_0^1 u du \leq a_p \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p} \cdot \int_0^1 u du$$

d'où, pour $p \geq 2$:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) \leq a_p \leq \frac{1}{2} \frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{p(p-1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right)$$

4. Soient m et n des entiers tels que $m > n \geq 1$. Alors $S_m - S_n = \sum_{p=1}^m a_p - \sum_{p=1}^n a_p = \sum_{p=n+1}^m a_p$ donc d'après l'encadrement précédent :

$$\frac{1}{2} \sum_{p=n+1}^m \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) \leq S_m - S_n \leq \frac{1}{2} \sum_{p=n+1}^m \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right)$$

d'où après télescopage :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \right) \leq S_m - S_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right)$$

et, en faisant tendre m vers $+\infty$:

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq \gamma - S_n \leq \frac{1}{2n}$$

5. Pour tout entier $n \geq 1$, $H_n = S_n + \ln(n+1)$ donc

$$H_n - \ln n - \gamma - \frac{1}{2n} = S_n - \gamma - \frac{1}{2n} + \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \underset{n \rightarrow \infty}{=} S_n - \gamma + \frac{1}{2n} + O \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

en utilisant le développement limité $\ln(1+x) = x + O(x^2)$.

Or, d'après l'inégalité précédente :

$$0 \leq S_n - \gamma + \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{2n(n+1)}$$

ce qui montre que $S_n - \gamma + \frac{1}{2n} \underset{n \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, d'où finalement :

$$\boxed{H_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

6. Il suffit de reprendre l'inégalité trouvée à la question 4 !

7. Pour $n = 7$, l'inégalité précédente donne $0 \leq \gamma - T_n \leq \frac{1}{112} < 10^{-2}$, donc T_7 convient.

On trouve $T_7 = \frac{1487}{560} - 3 * \ln(2) \approx 0.575915601$ alors que $\gamma \approx 0.57721566490153286061$.

Partie II : Deux représentations intégrales de la constante d'Euler

1. a) • Soit $f : t \mapsto \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}$. f est continue et à valeurs positives sur $[1, +\infty[$; quand $t \rightarrow +\infty$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0$ donc $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-t}$; puisque $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (fonction de référence), il en est de même de f .

• Soit $g : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$. g est continue et à valeurs positives sur $[1, +\infty[$; puisque $t \geq 1$, on a $g(t) \leq e^{-t}$, et, puisque $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, il en est de même de g .

b) $\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} = \frac{e^{-t} - 1 + t}{t(1-e^{-t})}$. Or, en utilisant le développement limité $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, on a

$$e^{-t} - 1 + t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^2}{2} \quad \text{et} \quad t(1-e^{-t}) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^2$$

donc

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} = \frac{1}{2}}$$

c) La fonction $\varphi : t \mapsto e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right)$ est continue sur $]0, +\infty[$ et, d'après la question précédente,

elle se prolonge en une fonction continue sur $[0, +\infty[$. Donc l'intégrale $\int_0^1 \varphi$ existe.

D'après la question a), φ est somme de deux fonctions intégrables sur $[1, +\infty[$; elle est donc également intégrable sur $[1, +\infty[$.

En conclusion, $\int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt$ existe.

2. a) Soient x, y deux réels strictement positifs.

En effectuant le changement de variable $u = at$, on a $\int_x^y \frac{e^{-at}}{t} dt = \int_{ax}^{ay} \frac{e^{-u}}{u} du$ et, de même,

$$\int_x^y \frac{e^{-bt}}{t} dt = \int_{bx}^{by} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt &= \int_{ax}^{ay} \frac{e^{-u}}{u} du - \int_{bx}^{by} \frac{e^{-u}}{u} du \\ &= \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-u}}{u} du + \int_{bx}^{ay} \frac{e^{-u}}{u} du - \int_{bx}^{ay} \frac{e^{-u}}{u} du - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-u}}{u} du \quad (\text{relation de Chasles}) \\ &= \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-u}}{u} du - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-u}}{u} du \end{aligned}$$

b) On suppose ici $a \leq b$ et $z > 0$.

On a donc : $\forall t \in [az, bz], e^{-bz} \leq e^{-t} \leq e^{-az}$, d'où en intégrant (les bornes sont dans le bons sens !),

$$e^{-bz} \int_{az}^{bz} \frac{dt}{t} \leq \int_{az}^{bz} \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-az} \int_{az}^{bz} \frac{dt}{t}$$

ce qui donne, compte tenu de $\int_{az}^{bz} \frac{dt}{t} = \ln bz - \ln az = \ln \frac{b}{a}$:

$$\boxed{e^{-bz} \ln \frac{b}{a} \leq \int_{az}^{bz} \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-az} \ln \frac{b}{a}}$$

c) • Il résulte de l'encadrement trouvé ci-dessus, et du théorème d'encadrement des limites, que

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \int_{az}^{bz} \frac{e^{-t}}{t} = \ln \frac{b}{a}.$$

• La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ étant intégrable sur $[1, +\infty[$, on peut écrire

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{ay}^{by} \frac{e^{-u}}{u} du = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\int_1^{by} \frac{e^{-u}}{u} du - \int_1^{ay} \frac{e^{-u}}{u} du \right) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = 0$$

• Donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ y \rightarrow +\infty}} \int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-u}}{u} du - \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{ay}^{by} \frac{e^{-u}}{u} du = \ln \frac{b}{a}$$

3. Une première représentation intégrale de la constante d'Euler

a) • On sait d'après le cours que, si $|q| < 1$, la série $\sum q^n$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Puisque $t > 0$, $0 < e^{-t} < 1$ donc $\frac{1}{1-e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-t})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt}$.

• Par télescopage :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t} \right) = \frac{1}{t} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} - \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)t} \right) = \frac{1}{t}$$

b) On en déduit :

$$e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) = e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} - e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-(n+1)t} - \frac{e^{-(n+1)t} - e^{-(n+2)t}}{t} \right)$$

c) La fonction $t \mapsto e^{-t}$ étant convexe, sa courbe représentative est située au-dessus de ses tangentes, en particulier au-dessus de sa tangente au point d'abscisse $t = 0$, qui a pour équation $t \mapsto 1 - t$.

Ainsi, pour tout t réel, $e^{-t} \geq 1 - t$ soit $1 - e^{-t} \leq t$, et, pour $t > 0$, on en déduit $\frac{1 - e^{-t}}{t} \leq 1$ ou

encore $\boxed{1 - \frac{1 - e^{-t}}{t} \geq 0}.$

d) Pour $t > 0$, posons $f(t) = e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right)$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(t) = e^{-(n+1)t} - \frac{e^{-(n+1)t} - e^{-(n+2)t}}{t}$.
Vérifions alors les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme obligamment appelé par l'énoncé :

• Les fonctions u_n sont évidemment continues sur \mathbb{R}_+^* .

- D'après les résultats de la question II.2, avec $a = n+1$ et $b = n+2$, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-(n+1)t} - e^{-(n+2)t}}{t}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* et $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)t} - e^{-(n+2)t}}{t} dt = \ln \frac{n+2}{n+1}$.

La fonction $t \mapsto e^{-(n+1)t}$ est elle aussi intégrable sur \mathbb{R}_+ et $\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t} dt = \frac{1}{n+1}$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est intégrable sur \mathbb{R}_+^* et $\int_0^{+\infty} u_n = \frac{1}{n+1} - \ln \frac{n+2}{n+1}$.

- La série $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{n+1} - \ln \frac{n+2}{n+1} \right)$ a même nature, et même somme, que la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} \right) = \sum_{n \geq 1} a_n$, donc converge et a pour somme γ .

- Enfin, la question II.3.b assure la convergence simple sur \mathbb{R}_+^* de la série de fonctions $\sum u_n$ vers f , qui est bien continue sur \mathbb{R}_+^* . Le théorème d'intégration terme à terme assure alors que f est

intégrable sur \mathbb{R}_+^* et que $\int_0^{+\infty} f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \gamma$ soit :

$$\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt .$$

4. Une deuxième représentation intégrale de la constante d'Euler

- a) y est un réel strictement positif. Ce qui a été fait à la question II.1 assure l'existence de l'intégrale

$\int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt$. Le changement de variable $u = e^{-t}$, qui est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de $]y, +\infty[$ sur $]0, e^{-y}]$ donne alors :

$$\int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt = - \int_{e^{-y}}^0 \frac{u}{1-u} \frac{1}{u} du = \int_0^{e^{-y}} \frac{du}{1-u} = -\ln(1-e^{-y})$$

donc $\ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt = -\ln \left(\frac{1-e^{-y}}{y} \right)$ qui tend vers 0 quand y tend vers 0^+ , puisque $1-e^{-y} \underset{y \rightarrow 0}{\sim} y$.

- b) Le résultat de II.3.d donne

$$\begin{aligned} \gamma &= \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt \\ &= \int_0^y e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt + \int_y^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt \\ &= \int_0^y e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt - \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \end{aligned}$$

(on a le droit de séparer ces trois intégrales, puisqu'elles convergent, en vertu de II.1 !). On en déduit :

$$\gamma + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_0^y e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt$$

- c) Donc $\gamma + \ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \underbrace{\int_0^y e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt}_{\text{tend vers 0 quand } y \rightarrow 0 \text{ car c'est l'intégrale d'une fonction prolongeable par continuité en } 0} + \underbrace{\ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt}_{\text{tend vers 0 quand } y \rightarrow 0 \text{ d'après II.4.a}}$

tend vers 0 quand $y \rightarrow 0^+$.

- d) • La fonction $f : t \mapsto e^{-t} \ln t$ est continue sur $]0, +\infty[$.

- f est de signe constant sur $]0, 1]$, et $f(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \ln t$; puisque $\int_0^1 \ln t \, dt$ existe (intégrale de référence), il en résulte que $\int_0^1 |f|$ existe.

- $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 f(t) = 0$ (croissances comparées) donc $f(t) \underset{t \rightarrow \infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$; puisque $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ existe, il en est de même de $\int_1^{+\infty} f = \int_1^{+\infty} |f|$.

En conclusion, f est intégrable sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$, donc sur \mathbb{R}_+^* .

Soient alors x, y deux réels strictement positifs tels que $y < x$. On a, en intégrant par parties :

$$\int_y^x e^{-t} \ln t \, dt = [-e^{-t} \ln t]_y^x + \int_y^x \frac{e^{-t}}{t} \, dt = e^{-y} \ln y - e^{-x} \ln x + \int_y^x \frac{e^{-t}}{t} \, dt$$

et, puisque $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est intégrable sur $[y, +\infty[$, on en tire, en faisant tendre x vers $+\infty$:

$$\int_y^{+\infty} e^{-t} \ln t \, dt = e^{-y} \ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \, dt$$

et enfin, puisque $t \mapsto e^{-t} \ln t$ est intégrable sur $]0, +\infty[$:

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t \, dt = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(e^{-y} \ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \, dt \right) .}$$

e) D'après les résultats des questions c) et d) :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t \, dt = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left((e^{-y} - 1) \ln y + \ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \, dt \right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} (e^{-y} - 1) \ln y - \gamma = -\gamma$$

puisque $(e^{-y} - 1) \ln y \underset{y \rightarrow 0^+}{\sim} y \ln y$. Ainsi :

$$\boxed{\gamma = - \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t \, dt .}$$

Partie III : Pour une valeur approchée de la constante d'Euler

1. a) • On avait trouvé, en II.A.a, pour tout réel $y > 0$, $\int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} \, dt = -\ln(1 - e^{-y})$,

donc $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} \, dt = -\ln(1 - e^{-1})$.

- Soit $x \in]0, 1]$. Le changement de variable $u = e^{-t}$ donne

$$\begin{aligned} \int_x^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} \right) dt &= - \int_{e^{-x}}^{e^{-1}} \left(\frac{-1}{\ln u} - \frac{u}{1 - u} \right) \frac{du}{u} = \int_{e^{-x}}^{e^{-1}} \left(\frac{1}{u \ln u} + \frac{1}{1 - u} \right) du \\ &= [\ln |\ln u| - \ln(1 - u)]_{e^{-x}}^{e^{-1}} \\ &= -\ln \left(\frac{x}{1 - e^{-x}} \right) - \ln(1 - e^{-1}) \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{x}{1 - e^{-x}} \right) = 0$, on en déduit $\int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} \right) dt = -\ln(1 - e^{-1})$ et, finalement :

$$\boxed{\int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} \right) dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} \, dt = -\ln(1 - e^{-1}).}$$

b) D'après II.3.d :

$$\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt = \int_0^1 e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt + \int_1^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt$$

Donc, en utilisant la question précédente (toutes les intégrales écrites sont bien convergentes!) :

$$\begin{aligned} \gamma &= \int_0^1 e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \\ &= \int_0^1 e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt + \int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \right) dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \end{aligned}$$

ce qui est le résultat demandé.

2. a) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} x^k$ est une série entière. Pour déterminer son rayon de convergence, on peut utiliser la règle de d'Alembert pour les séries numériques. Si $x \neq 0$,

$$\frac{\left| \frac{H_{k+1}}{(k+1)!} x^{k+1} \right|}{\left| \frac{H_k}{k!} x^k \right|} = \frac{H_{k+1}}{H_k} \frac{|x|}{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{puisque } H_k \sim \ln k$$

ce qui prouve que le rayon de convergence de cette série entière est $+\infty$. D'après les théorèmes du cours, on peut conclure :

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} x^k \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R} .$$

b) Les théorèmes du cours sur les séries entières permettent de dériver cette série terme à terme donc

$$\begin{aligned} F'(x) - F(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{H_k}{(k-1)!} x^{k-1} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} x^k \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{H_k}{(k-1)!} x^{k-1} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{H_{k-1}}{(k-1)!} x^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{H_k - H_{k-1}}{(k-1)!} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} \end{aligned}$$

puisque $H_k - H_{k-1} = \frac{1}{k}$ pour tout $k \geq 1$. En comparant avec le développement en série entière de

$$\exp : e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}, \text{ on a bien, pour } x \neq 0 : F'(x) - F(x) = \frac{1}{x} (e^x - 1) .$$

c) On résout alors l'équation différentielle ci-dessus par la méthode de variations de la constante. En

posant $F(x) = e^x \varphi(x)$ pour tout $x > 0$, on obtient $\varphi'(x) = \frac{1}{x} (e^x - 1)$, d'où $\varphi(x) = \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt + cste$.

Puisque $\varphi(0) = F(0) = 0$, la constante est nulle et l'on obtient bien :

$$\forall x > 0, F(x) = e^x \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt .$$

3. Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} \gamma + \ln x + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt &= \gamma + \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (\text{d'après III.1.b}) \\ &= \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_1^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \\ &= \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt \end{aligned}$$

ce qui donne bien, compte tenu de la question précédente :

$$\boxed{\gamma + \ln x = e^{-x}F(x) - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt .}$$

4. Puisque, pour $k \geq 1$, $H_k = \sum_{p=1}^k \frac{1}{p}$, on a $H_k \leq k$ donc

$$\sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} n^k \leq \sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{n^k}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^{an+1+k}}{(an+k)!} = n^{an+1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^k}{(an+k)!} = n^{an+1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(an)^k}{(an+k)!} \left(\frac{1}{a}\right)^k$$

et, puisque, pour tout entier $k \geq 0$, $\frac{(an)^k}{(an+k)!} \leq \frac{1}{(an)!}$ et que la série géométrique $\sum \frac{1}{a^k}$ converge (car $a \geq 2$), on obtient la première inégalité demandée :

$$\sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} n^k \leq \frac{n^{an+1}}{(an)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^k$$

En utilisant l'indication de l'énoncé, on a $(an)! \geq \sqrt{2\pi an} \left(\frac{an}{e}\right)^{an}$; on a aussi $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{a}} = \frac{a}{a-1}$, et, en remplaçant dans l'inégalité précédente, on trouve :

$$\sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} n^k \leq \frac{a}{a-1} \frac{n^{an+1}}{\sqrt{2\pi an}} \left(\frac{e}{an}\right)^{an} = \frac{a}{a-1} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}} \left(\frac{e}{a}\right)^{an}$$

5. D'après III.3, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\gamma + \ln n = e^{-n}F(n) - \int_n^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = e^{-n} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} n^k - \int_n^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

donc

$$\gamma + \ln n - e^{-n} \sum_{k=0}^{an} \frac{H_k}{k!} n^k = e^{-n} \sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} n^k - \int_n^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

d'où

$$\left| \gamma + \ln n - e^{-n} \sum_{k=0}^{an} \frac{H_k}{k!} n^k \right| \leq e^{-n} \sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} n^k + \int_n^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \frac{a}{a-1} \frac{e^{-n}\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}} \left(\frac{e}{a}\right)^{an} + \frac{1}{n} \underbrace{\int_n^{+\infty} e^{-t} dt}_{=e^{-n}}$$

ce qui est le résultat demandé.

6. Pour $a \geq 3$, $\frac{e}{a} < 1$, et le terme $e^{-n}\sqrt{n}\left(\frac{e}{a}\right)^{an}$ est vite négligeable devant $\frac{e^{-n}}{n}$!

On peut donc considérer que l'erreur commise en approchant γ par l'expression $e^{-n} \sum_{k=0}^{an} \frac{H_k}{k!} n^k - \ln n$ est à peu près égale à $\frac{e^{-n}}{n}$. Pour avoir une erreur inférieure à 10^{-10} , il faut donc choisir $n = 21$ ($\frac{e^{-21}}{21} \approx 3,6 \cdot 10^{-11}$).

Dans ce cas, pour minimiser le nombre de termes à calculer, autant prendre $a = 3$; d'ailleurs, pour $a = 3$ et $n = 21$, le terme $\frac{a}{a-1} \frac{e^{-n} \sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}} \left(\frac{e}{a}\right)^{an}$ est approximativement égal à $2,4 \cdot 10^{-12}$, ce qui confirme que la valeur de a n'a finalement pas d'importance pour le calcul d'erreur!

Une valeur approchée de γ sera donc $e^{-21} \sum_{k=0}^{63} \frac{H_k}{k!} 21^k - \ln 21$. Bien sûr, pour le calcul de cette somme, on ne calculera pas séparément n^k et $k!$, mais on utilisera la relation de récurrence $\frac{n^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{n^k}{k!} \cdot \frac{n}{k+1}$.

Bien que non demandé, voici le programme Maple© correspondant :

```

approx := proc (a, n)
local H, k, S, nk;
S := 0;
H := 1.0;
nk := n;
for k to a*n do
    S := S+H*nk;
    H := H+1/(k+1);
    nk := nk*n/(k+1)
end do;
RETURN(evalf(exp(-n)*S-ln(n)))
end proc;

> Digits := 20; approx(3, 21); evalf(gamma);

```

0.5772156649358897937
0.57721566490153286061

Partie IV : La constante d'Euler somme de la série de Vacca

1. a) Pour tout entier $p \geq 1$:

$$\begin{aligned}
 \frac{v_p}{p} &= \sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{\substack{k=2^p \\ k \text{ pair}}}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{k} - \sum_{\substack{k=2^p \\ k \text{ impair}}}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{k} \\
 &= \sum_{\substack{k=2^p \\ k \text{ pair}}}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{k} - \left(\sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{k} - \sum_{\substack{k=2^p \\ k \text{ pair}}}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{k} \right) \\
 &= 2 \sum_{\substack{k=2^p \\ k \text{ pair}}}^{2^{p+1}-2} \frac{1}{k} - \sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{k} \\
 &= 2 \sum_{k=2^{p-1}}^{2^p-1} \frac{1}{2k} - \sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{k} = \sigma_{p-1} - \sigma_p
 \end{aligned}$$

b) Donc

$$\sum_{p=1}^n v_p = \sum_{p=1}^n p \sigma_{p-1} - \sum_{p=1}^n p \sigma_p = \sum_{p=0}^{n-1} (p+1) \sigma_p - \sum_{p=1}^n p \sigma_p = \sum_{p=0}^{n-1} [(p+1) - p] \sigma_p - n \sigma_n = \sum_{p=0}^{n-1} \sigma_p - n \sigma_n$$

c) Pour $n \geq 1$:

$$\sum_{p=0}^{n-1} \sigma_p = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{h=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{h} = \sum_{h=0}^{2^n-1} \frac{1}{h} = H_{2^n} - \frac{1}{2^n}$$

d) On a donc

$$\sigma_n = \sum_{p=0}^n \sigma_p - \sum_{p=0}^{n-1} \sigma_p = H_{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} - H_{2^n} + \frac{1}{2^n} = H_{2^{n+1}} - H_{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

d'où

$$\sum_{p=1}^n v_p = \sum_{p=0}^{n-1} \sigma_p - n\sigma_n = H_{2^n} - \frac{1}{2^n} - n\sigma_n = H_{2^n} - \frac{1}{2^n} - n\left(H_{2^{n+1}} - H_{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

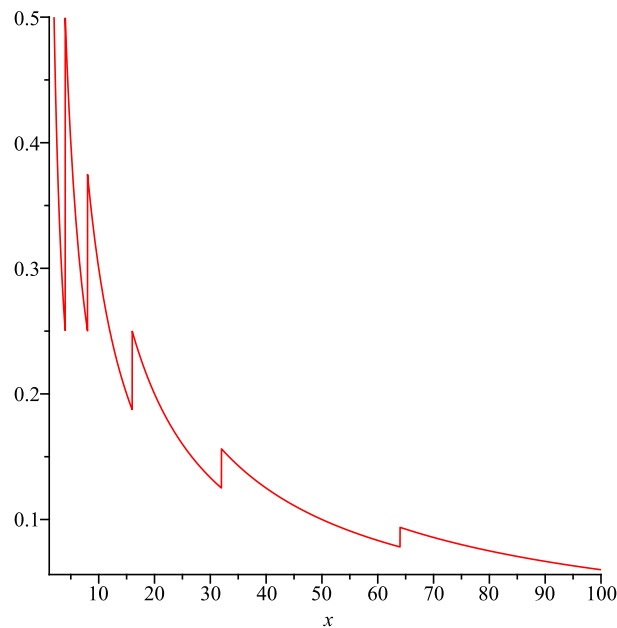
En utilisant le développement asymptotique de H_{2^n} obtenu en I.5, on en déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n v_p &= \ln(2^n) + \gamma + \frac{1}{2^{n+1}} + o\left(\frac{1}{2^n}\right) - \frac{1}{2^n} - n\left(\ln(2^{n+1}) + \gamma + \frac{1}{2^{n+2}} - (\ln(2^n) + \gamma + \frac{1}{2^{n+1}}) + o\left(\frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \\ &= \gamma + \frac{n}{2^{n+2}} + o\left(\frac{n}{2^n}\right) \end{aligned}$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^n v_p = \gamma$. Ainsi :

La série de terme général v_p converge et $\sum_{p=1}^{+\infty} v_p = \gamma$.

2. a) On ne peut pas appliquer ici le critère spécial sur les séries alternées car la suite $n \mapsto \frac{\lfloor \log_2 n \rfloor}{n}$ n'est pas décroissante. Voici d'ailleurs le graphe de la fonction $x \mapsto \frac{\lfloor \log_2 x \rfloor}{x}$:



- b) • Soit $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $2^{n+1} \leq m < 2^{n+2}$.

La série de terme général $\frac{(-1)^k}{k}$ vérifie le critère spécial des séries alternées. En particulier, elle est convergente, et si on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$, on sait que $|R_n| \leq \frac{1}{n+1}$.

Or on a $\sum_{k=2^{n+1}}^m \frac{(-1)^k}{k} = R_{2^{n+1}-1} - R_m$ donc $\left| \sum_{k=2^{n+1}}^m \frac{(-1)^k}{k} \right| \leq |R_{2^{n+1}-1}| + |R_m|$ ce qui donne

$$\left| \sum_{k=2^{n+1}}^m \frac{(-1)^k}{k} \right| \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{m+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}$$

- Pour k entier tel que $2^{n+1} \leq k < 2^{n+2}$, on a $n+1 \leq \log_2 k < n+2$ donc $[\log_2 k] = n+1$.
Par suite $\sum_{k=2^{n+1}}^m u_k = \sum_{k=2^{n+1}}^m \frac{(-1)^k}{k} [\log_2 k] = (n+1) \sum_{k=2^{n+1}}^m \frac{(-1)^k}{k}$ et l'inégalité précédente donne immédiatement :

$$\left| \sum_{k=2^{n+1}}^m u_k \right| \leq \frac{n+1}{2^n}.$$

- c) • Soit $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $2^{n+1} \leq m < 2^{n+2}$.
Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m u_k &= \sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} u_k + \sum_{k=2^{n+1}}^m u_k \\ &= \sum_{p=0}^n v_p + \sum_{k=2^{n+1}}^m u_k \end{aligned}$$

et, puisque $\left| \sum_{k=2^{n+1}}^m u_k \right| \leq \frac{n+1}{2^n}$, on a bien $\sum_{k=2^{n+1}}^m u_k = O\left(\frac{n}{2^n}\right)$ i.e. $\sum_{k=1}^m u_k = \sum_{p=0}^n v_p + O\left(\frac{n}{2^n}\right)$.

- Pour tout entier ≥ 1 , il existe un et une seul entier n tel que $2^{n+1} \leq m < 2^{n+2}$: c'est $n = [\log_2 m] - 1$. Donc, quand m tend vers $+\infty$, il en est de même de n ; puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^n v_p = \gamma$, il résulte immédiatement de la relation précédente que $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m u_k$ existe et vaut γ , c'est-à-dire :

$$\text{La série de terme général } u_n \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \gamma.$$

3. a) D'après le critère spécial sur les séries alternées (majoration du reste), on sait que $|r_n| \leq \frac{1}{2^n}$. La série de terme général $\frac{1}{2^n}$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$, donc converge. Par comparaison de série à termes positifs, on en déduit :

La série de terme général $|r_n|$ converge, i.e la série de terme général r_n est absolument convergente.

- b) • La relation $v_k = k(r_k - r_{k+1})$ est immédiate.
• On additionne ensuite ces relations pour k variant de 1 à n , et, exactement comme dans IV.1.b,

on trouve facilement : $\sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^n r_k - nr_{n+1}$.

- De l'inégalité $|r_{n+1}| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$, on déduit $\lim_{n \rightarrow \infty} nr_{n+1} = 0$.

La relation précédente prouve donc, en faisant tendre n vers $+\infty$, que $\sum_{n=1}^{+\infty} r_n = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k = \gamma$, ce qui peut aussi s'écrire :

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=2^n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \right).$$

Partie V : La formule de Gosper

1. On reprend les notations et l'indication de l'énoncé. Dans l'anneau $\mathcal{L}(\mathcal{F})$, puisque $\text{Id}_{\mathcal{F}}$ et T commutent, on peut utiliser la formule du binôme. On a donc

$$\Delta^n = (\text{Id}_{\mathcal{F}} - T)^n = \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{n}{p} T^p$$

Or, par récurrence immédiate sur p , il est facile de vérifier que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathcal{F}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on a $T^p(x)[k] = x[k+p]$. On aura donc bien, pour tout $x \in \mathcal{F}$ et tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\Delta^n(x)[k] = \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{n}{p} x[k+p] .$$

2. Rem : il s'agit dans cette question de démontrer le théorème de Césaro dans un cas particulier...

a) Pour $n \geq p$, $\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!} \sim \frac{n^p}{p!}$ donc $\frac{\binom{n}{p}}{2^n} \sim \frac{1}{2^n} \frac{n^p}{p!}$, qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (croissances comparées).

b) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la suite (u_n) tend vers 0, par définition de la limite, il existe un entier k tel que, pour tout $p \geq k+1$, on ait $|u_p| < \frac{\varepsilon}{2}$.

On aura alors, pour $n \geq k+1$:

$$\left| \frac{1}{2^n} \sum_{p=k+1}^n \binom{n}{p} u_p \right| \leq \frac{1}{2^n} \sum_{p=k+1}^n \binom{n}{p} |u_p| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{2^n} \sum_{p=k+1}^n \binom{n}{p} \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = \frac{\varepsilon}{2}$$

(puisque $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = (1+1)^n = 2^n$).

D'autre part, d'après la question précédente, l'entier k étant fixé comme ci-dessus, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^k \binom{n}{p} u_p = 0$

(somme finie de termes qui tendent vers 0) donc il existe un entier n_0 , que l'on peut supposer $\geq k+1$, tel que, pour tout entier $n \geq n_0$ on ait $\left| \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^k \binom{n}{p} u_p \right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Finalement, en utilisant l'égalité gentiment fournie par l'énoncé, on obtient, pour $n \geq n_0$:

$$\left| \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} u_p \right| \leq \left| \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^k \binom{n}{p} u_p \right| + \left| \frac{1}{2^n} \sum_{p=k+1}^n \binom{n}{p} u_p \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ce qui montre, par définition de la limite, que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} u_p = 0 .$$

c) Dans le cas où la suite (u_n) tend vers ℓ , posons $v_n = u_n - \ell$. D'après le résultat précédent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} v_p = 0 .$$

Mais

$$\frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} v_p = \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (u_p - \ell) = \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} u_p - \left(\frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \right) \ell = \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} u_p - \ell$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} v_p = 0$ implique :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} u_p = \ell .$$

3. a) En utilisant le résultat de la question V.1 et l'indication de l'énoncé, on a

$$\begin{aligned}
V_N &= \sum_{n=0}^N \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^n + 1} = \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (-1)^p x_p \\
&= \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (U_p - U_{p-1}) \\
&= \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} U_p - \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq 0}}^n \binom{n}{p} U_{p-1} \right) \quad (\text{car } U_{-1} = 0) \\
&= \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} U_p - \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p+1} U_p \right) \quad (\text{en posant } \binom{n}{n+1} = 0) \\
&= \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^n \left(\binom{n}{p} - \binom{n}{p+1} \right) U_p \\
&= \sum_{p=0}^N \left[\sum_{n=p}^N \frac{1}{2^{n+1}} \left(\binom{n}{p} - \binom{n}{p+1} \right) \right] U_p \quad \text{car } \begin{cases} 0 \leq n \leq N \\ 0 \leq p \leq n \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leq p \leq N \\ p \leq n \leq N \end{cases}
\end{aligned}$$

donc pour prouver la formule de l'énoncé, il suffit de prouver que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall N \geq p, \sum_{n=p}^N \frac{1}{2^{n+1}} \left(\binom{n}{p} - \binom{n}{p+1} \right) = \frac{1}{2^{N+1}} \binom{N+1}{p+1}$$

ce qui se fait facilement par récurrence sur N :

- L'égalité est vérifiée pour $N = p$, car elle s'écrit alors $\frac{1}{2^{p+1}} \binom{p}{p} = \frac{1}{2^{p+1}} \binom{p+1}{p+1}$.
- Supposons l'égalité réalisée au rang N . Alors,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=p}^{N+1} \frac{1}{2^{n+1}} \left(\binom{n}{p} - \binom{n}{p+1} \right) &= \sum_{n=p}^N \frac{1}{2^{n+1}} \left(\binom{n}{p} - \binom{n}{p+1} \right) + \frac{1}{2^{N+2}} \left(\binom{N+1}{p} - \binom{N+1}{p+1} \right) \\
&= \frac{1}{2^{N+1}} \binom{N+1}{p+1} + \frac{1}{2^{N+2}} \binom{N+1}{p} - \frac{1}{2^{N+2}} \binom{N+1}{p+1} \quad (\text{avec l'hyp. de réc.}) \\
&= \frac{1}{2^{N+2}} \binom{N+1}{p+1} + \frac{1}{2^{N+2}} \binom{N+1}{p} \\
&= \frac{1}{2^{N+2}} \binom{N+2}{p+1} \quad (\text{d'après la formule du triangle de Pascal})
\end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat voulu à l'ordre $N+1$, et achève la démonstration.

- b) On a supposé que la série de terme général $(-1)^k x_k$ converge. Notons $S = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x_k$. On a donc

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} U_N = S.$$

On a alors, d'après la relation précédente, et en utilisant le résultat de V.2.c, $\lim_{N \rightarrow +\infty} V_N = S$. Cela

revient à dire que la série de terme général $\frac{\Delta^n(x)[0]}{2^n + 1}$ converge et a pour somme S , soit :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^n + 1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x_k.}$$

Rem : la série $\sum \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^n + 1}$ s'appelle la transformée d'Euler de la série $\sum (-1)^k x_k$. Ces deux séries ont même somme, mais la série transformée converge en général beaucoup plus vite que la série initiale !

4. a) • Rem : le résultat admis se démontre facilement par récurrence :

$$\text{Notons } I_n, m = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx, \text{ pour } n, m \in \mathbb{N}.$$

Une intégration par parties donne :

$$I_{n+1,m} = \int_0^1 x^{n+1}(1-x)^m dx = \left[-x^{n+1} \frac{(1-x)^{m+1}}{m+1} \right]_0^1 + \frac{n+1}{m+1} \int_0^1 x^n (1-x)^{m+1} dx = \frac{n+1}{m+1} I_{n,m+1}$$

d'où l'on tire par une récurrence facile :

$$I_{n,m} = \frac{n!}{(m+1) \cdots (m+n)} I_{0,m+n} = \frac{n!}{(m+1) \cdots (m+n)(m+n+1)} = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

- En utilisant le résultat de la question V.1, on a $\Delta^m(x)[0] = \sum_{p=0}^m (-1)^p \binom{m}{p} \frac{1}{2^n + p}$.

En écrivant que $\frac{1}{2^n + p} = \int_0^1 x^{2^n + p - 1} dx$, et par linéarité de l'intégrale on obtient :

$$\Delta^m(x)[0] = \int_0^1 \left(\sum_{p=0}^m (-1)^p \binom{m}{p} x^{2^n + p - 1} \right) dx = \int_0^1 x^{2^n - 1} \left(\sum_{p=0}^m (-1)^p \binom{m}{p} x^p \right) dx$$

soit

$$\Delta^m(x)[0] = \int_0^1 x^{2^n - 1} (1-x)^m dx = I_{2^n - 1, m} = \frac{(2^n - 1)!m!}{(2^n + m)!} = \frac{1}{2^n} \frac{1}{\binom{2^n + m}{m}}$$

- b) On reprend le résultat de IV.3.b, qui peut s'écrire : $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j x_j \right)$, donc, d'après V.3.b,

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\Delta^m(x)[0]}{2^m + 1} \right), \text{ et enfin, en remplaçant à l'aide du calcul précédent :}$$

$$\boxed{\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+m+1}} \frac{1}{\binom{2^n + m}{m}} \right) .}$$

- c) Pour $m = 0$, on a $\frac{1}{2^{n+m+1}} \frac{1}{\binom{2^n + m}{m}} = \frac{1}{2^{n+1}}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$ donc $\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+m+1}} \frac{1}{\binom{2^n + m}{m}} \right)$ ce qui peut s'écrire

$$\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{p=2}^{+\infty} \sum_{\substack{n+m=p \\ n \geq 1, m \geq 1}} \frac{1}{2^{n+m+1}} \frac{1}{\binom{2^n + m}{m}} = \frac{1}{2} + \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{p+1}} \sum_{\substack{n+m=p \\ n \geq 1, m \geq 1}} \frac{1}{\binom{2^n + m}{m}} = \frac{1}{2} + \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{p+1}} \sum_{m=1}^{p-1} \frac{1}{\binom{2^{p-m} + m}{m}}$$

Rem : Cette série converge très rapidement. Par exemple, en calculant pour p variant de 2 à 100, on trouve une précision de l'ordre de 10^{-30} .
