CPGE RÉSEAU IBNGHAZI

MP* 1 (Rabat)

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

Préparation aux Concours (CNC-CCP)

Séries Numériques

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels et n et n_0 sont des entiers naturels.
On va établit un résultat général appelé : Règle de Raabe-Duhamel.

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite de réels strictement positifs telle qu'il existe un réel λ vérifiant : $\forall n \geq n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\lambda}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Remarque : cette propriété permet d'écrire qu'au voisinage de $+\infty$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \sim -\frac{\lambda}{n}$.
On utilisera régulièrement le résultat suivant (vu normalement en première année) : soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, si on a $u_n \sim v_n$ (sous entendu au voisinage de $+\infty$) alors les suites ont même signe à partir d'un certain rang.

1) Prouver que si $\lambda < 0$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

2) Soit β un réel quelconque et $v_n = \frac{1}{n^\beta}$. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ où μ est un réel, indépendant de n, à déterminer.

3) On suppose que $\lambda > 1$. On se propose de démontrer que la série $\sum u_n$ converge. On choisit β tel que $\lambda > \beta > 1$.
   (a) Justifier l'existence d'un entier naturel N tel que, pour $n \geq N$, on ait $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.
   (b) Déterminer un réel positif K, indépendant de n, tel que pour $n \geq N$, on ait $u_n \leq K v_n$.
   (c) Prouver que lé série $\sum u_n$ converge.

4) On suppose que $0 \leq \lambda < 1$. Démontrer par un raisonnement analogue à celui fait à la question précédente que la série $\sum u_n$ diverge (on choisira β de manière à ce que la série $\sum v_n$ diverge et que ceci implique la divergence de la série $\sum u_n$).

5) Pour $n \geq 2$, on pose $x_n = \dfrac{1}{n}$ et $y_n = \dfrac{1}{n\ln(n)^2}$. Déterminer la nature des séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ et en déduire que le cas $\lambda = 1$ est un cas douteux de la règle de Raabe-Duhamel.

6) Pour $n \geq 2$, on pose $w_n = \sqrt{(n-1)!}\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. Déterminer la nature de la série $\sum w_n$.

Correction :

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels et n et n_0 sont des entiers naturels.
On va établit un résultat général appelé : Règle de Raabe-Duhamel.

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite de réels strictement positifs telle qu'il existe un réel λ vérifiant : $\forall n \geq n_0,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\lambda}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Remarque : cette propriété permet d'écrire qu'au voisinage de $+\infty$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \sim -\frac{\lambda}{n}$.
On utilisera régulièrement le résultat suivant (vu normalement en première année) : soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, si on a $u_n \sim v_n$ (sous entendu au voisinage de $+\infty$) alors les suites ont même signe à partir d'un certain rang.

1) Prouver que si $\lambda < 0$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Correction : Si $\lambda < 0$ alors, comme on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \sim -\dfrac{\lambda}{n}$, à partir d'un certain rang la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1\right)$ est positive (comme $(-\frac{\lambda}{n})$) et donc, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive on en déduit qu'elle est croissante à partir d'un certain rang. Cette ne peut donc pas converger vers 0, car elle est strictement positive. La série est donc grossièrement divergente.

2) Soit β un réel quelconque et $v_n = \frac{1}{n^\beta}$. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ où μ est un réel, indépendant de n, à déterminer.

Correction : Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{n^\beta}$. On a, pour n au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \dfrac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. On en déduit que, au voisinage de $+\infty$, on a
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{-\lambda+\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. On obtient donc le résultat souhaité avec $\mu = \beta - \lambda$.

3) On suppose que $\lambda > 1$. On se propose de démontrer que la série $\sum u_n$ converge. On choisit β tel que $\lambda > \beta > 1$.

(a) Justifier l'existence d'un entier naturel N tel que, pour $n \geq N$, on ait $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

Correction : d'après la question précédente on a, au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{-\lambda+\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, on en déduit que, comme $-\lambda + \beta \neq 0$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \sim \frac{-\lambda+\beta}{n}$$

On en déduit qu'il existe un entier N tel que pour $n \geq N$ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ est du même signe que $-\lambda + \beta$. Par hypothèse sur β, celui-ci est négatif, donc, pour $n \geq N$ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

(b) Déterminer un réel positif K, indépendant de n, tel que pour $n \geq N$, on ait $u_n \leq K v_n$.

Correction : d'après la question précédente, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. On peut encore écrire que pour tout $n \geq N$ $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \dfrac{u_n}{v_n}$. La suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est donc décroissante à partir du rang N, on en déduit alors que, pour tout $n \geq N$ on a $\dfrac{u_n}{v_n} \leq \dfrac{u_N}{v_N}$. On pose alors $K = \frac{u_N}{v_N}$ et on a pour tout $n \geq N$ $u_n \leq K v_n$.

(c) Prouver que lé série $\sum u_n$ converge.

Correction : la série $\sum v_n$ est une série de Riemann, or on a par hypothèse $\beta > 1$, cette série est alors, par propriété, convergente. D'après la question précédente on a $u_n = 0(v_n)$, les deux suites étant strictement positives on en déduit que la série $\sum u_n$ est convergente.

4) On suppose que $0 \leq \lambda < 1$. Démontrer par un raisonnement analogue à celui fait à la question précédente que la série $\sum u_n$ diverge (on choisira β de manière à ce que la série $\sum v_n$ diverge et que ceci implique la divergence de la série $\sum u_n$).

Correction : on considère β tel que $\lambda < \beta \leq 1$. Comme on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \sim \dfrac{-\lambda+\beta}{n}$ on a l'existence d'un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ est du signe de $-\lambda + \beta$ c'est à dire positif. La suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est alors croissante à partir du rang N et donc, pour tout $n \geq N$, $\dfrac{u_n}{v_n} \geq \dfrac{u_N}{v_N}$, et donc $u_n \geq K v_n$ avec $K = \frac{u_N}{v_N}$. La série $\sum v_n$ est une série de Riemann divergente ($\beta \leq 1$), on en déduit par théorème de comparaison que la série $\sum u_n$ diverge.

5) Pour $n \geq 2$, on pose $x_n = \dfrac{1}{n}$ et $y_n = \dfrac{1}{n\ln(n)^2}$. Déterminer la nature des séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ et en déduire que le cas $\lambda = 1$ est un cas douteux de la règle de Raabe-Duhamel.

Correction : la série $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente. On a de plus $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
A l'aide de la décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)^2}$ sur $]1, +\infty[)$ on a

$$\forall n \geq 3,\ \sum_{k=3}^{n} y_k \leq \int_2^n \frac{1}{t\ln(t)^2}\,dt = \left[-\frac{1}{\ln(t)}\right]_2^n \leq \frac{1}{\ln(2)}$$

$\sum(y_n)$ est ainsi convergente car c'est une série positive majorée.
De plus $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + o(\frac{1}{n})$ donne

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1}\left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-2} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On peut ainsi être dans le cas $\lambda = 1$ avec convergence ou divergence de la série (on a bien un contre-exemple puisque les séries proposées sont à termes > 0).

6) Pour $n \geq 2$, on pose $w_n = \sqrt{(n-1)!}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. Déterminer la nature de la série $\sum w_n$.

Correction : On a $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ Comme (w_n) est à terme strictement positifs, on est dans le cas précédent avec $\lambda = \frac{1}{6} < 1$ et $\sum(w_n)$ diverge.