Séries Numériques

Formule de Stirling :

I Le développement

Le but de ce développement est de démontrer la formule de Stirling via l'utilisation des intégrales de Wallis.

Proposition 1 : Intégrales de Wallis [Deschamps, p.651] :

On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x$.
* On a $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$.
* Pour tout $n \geq 2$, on a $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.
* La suite $(nI_nI_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante et de valeur $\frac{\pi}{2}$.
* Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.
* On a l'équivalent $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Preuve :
* Un calcul donne :

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \text{ et } I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^1(t)\mathrm{d}t = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

* Les fonctions $u : t \longmapsto -\cos(t)$ et $v : t \longmapsto \sin^{n-1}(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus, on a $u'(x) = \sin(x)$ et $v'(x) = (n-1)\cos(x)\sin^{n-2}(x)$.

Par le théorème d'intégration par parties sur un segment, on a donc :

$$\begin{aligned} I_n &:= \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(t)v(t)\mathrm{d}t \\ &= \left[-\cos(t)\sin^{n-1}(t)\right] + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^{n-2}(t)\mathrm{d}t \\ &= 0 + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2(t)\right)\sin^{n-2}(t)\mathrm{d}t = (n-1)\left(I_{n-2} - I_n\right) \end{aligned}$$

On obtient donc $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ $(*)$.

* En multipliant la relation $(*)$ ci-dessus par nI_{n-1}, on obtient que pour tout $n \geq 2$, $nI_nI_{n-1} = (n-1)I_{n-1}I_{n-2}$, donc la suite $(nI_nI_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante et de valeur $1 \times 1 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

* Pour tout entier naturel p non nul, on a :

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{\prod_{k=1}^{2p-1}(2p-k)}{\prod_{k=1}^{p} 2k} I_0 = \frac{\frac{(2p)!}{2^p p!}}{2^p p!}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}$$

D'où :

$$I_{2p+1} = \frac{1}{(2p+1)I_{2p}}\frac{\pi}{2} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

* Pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leq \sin(t) \leq 1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \sin^{n+1}(t) \leq \sin^n(t)$ et donc par croissance de l'intégrale, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Or, puisque cette suite est à valeurs positives, on a alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1}I_n \leq I_n^2 \leq I_nI_{n-1}$, c'est-à-dire :

$$\frac{\pi}{2(n+1)} \leq I_n^2 \leq \frac{\pi}{2n}$$

Ainsi, on obtient par encadrement et positivité de I_n que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

■

Proposition 2 : Formule de Stirling [Deschamps, p.791] :

Soit n un entier naturel.
On a l'équivalent :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Preuve :
On définit les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n := n!\left(\frac{e}{n}\right)^n \text{ et } w_n := \frac{v_n}{\sqrt{n}}$$

De l'égalité $\frac{v_{n+1}}{v_n} = e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$, on obtient que :

$$\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = 1 - n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

De plus, comme $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{v_{n+1}}{v_n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}$, on a :

$$\ln(w_{n+1}) - \ln(w_n) = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit que la série $\sum(\ln(w_{n+1}) - \ln(w_n))$ converge absolument (par comparaison à une série de Riemann convergente).

Par la correspondance suite-série, on en déduit que la suite $(\ln(w_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge de limite notée ℓ. Par continuité de la fonction exponentielle, on obtient alors que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $K = e^\ell > 0$.

On a ainsi prouvé qu'il existe $K > 0$ tel que $n! \sim K\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}$ et $I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. On a donc :

$$I_{2n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{Ke^{-2n}(2n)^{2n}\sqrt{2n}}{2^{2n}(Ke^{-n}n^n\sqrt{n})^2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{K\sqrt{2n}}$$

Enfin, par unicité de la limite de la suite $(\sqrt{n}I_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient $K = \sqrt{2\pi}$.

Finalement, on obtient bien que $n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

■

II Remarques sur le développement

II.1 Sur les intégrales de Wallis

Les intégrales de Wallis jouent un rôle central dans ce développement et possèdent en réalité d'autres applications comme par exemple le calcul des intégrales de Gauss en utilisant des encadrements (même si ce n'est pas la méthode la plus rapide car on peut utiliser l'analyse complexe ou la transformation de Fourier pour arriver au même résultat plus rapidement.

Il est également possible de définir les intégrales de Wallis avec un cosinus et non plus un sinus par un simple changement de variables et on peut également s'intéresser à la fonction génératrice de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Il est enfin intéressant de constater que les intégrales de Wallis peuvent apparaître dans des formules faisant intervenir les fonctions Bêta et Gamma et que l'on obtient des résultats très similaires avec les intégrales de Futuna.

II.2 Pour aller plus loin...

La formule de Stirling peut se démontrer avec d'autres manières, comme par exemple avec l'étude de deux autres suites (démonstration similaire) ou bien de manière complètement différente avec les probabilités.

Cette formule de Stirling permet de trouver la nature de nouvelles séries par comparaison et permet de démontrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2 - 1} = \frac{\pi}{2}$$

Enfin, on peut obtenir un raffinement de la formule de Stirling précédente en utilisant la formule d'Euler-Maclaurin et la formule établie précédemment. En effet, on trouve :

$$n! \underset{n \to +\infty}{=} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$