

Préparation aux Concours (CNC-CCP)

Séries Numériques

Première partie : convergence de séries par transformation d'Abel

III.1. On considère une suite de réels (a_n) , une suite de complexes (b_n) et on note pour tout entier naturel n : $S_n = \sum_{k=0}^n a_k b_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$.

En remarquant que, pour $k \geq 1$, $b_k = B_k - B_{k-1}$, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n \text{ (transformation d'Abel).}$$

III.2. On suppose que la suite (B_n) est bornée et que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle.

III.2.a Démontrer que la série $\sum_{k \geq 0} (a_k - a_{k+1})$ converge.

III.2.b En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.

III.2.c En appliquant le résultat précédent au cas où $b_n = (-1)^n$, donner une démonstration du théorème des séries alternées, après l'avoir énoncé.

III.3. Exemple.

Dans cette question, θ est un réel différent de $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) et $\alpha \in \mathbb{R}$.

III.3.a Calculer pour n entier naturel non nul, $\sum_{k=1}^n e^{ik\theta}$.

III.3.b Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.

III.4. Soit la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ où pour x réel et n entier naturel non nul, $u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

Démontrer que cette série de fonctions converge simplement en tout point de \mathbb{R} .

On pourra utiliser sans démonstration le fait qu'une série de complexes $\sum u_n$ converge si et seulement si, les deux séries ayant pour termes généraux les parties réelles et parties imaginaires (c'est-à-dire $\sum \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(u_n)$) convergent.

On notera U sa fonction somme : pour tout réel x , $U(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

Deuxième partie : convergence uniforme de séries

III.5. On considère une suite de réels (a_n) et (f_n) une suite de fonctions définies sur une partie A de \mathbb{C} et à valeurs dans \mathbb{C} .

On pose, pour tout $z \in A$ et pour tout entier naturel n , $F_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k(z)$.

On suppose que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle et qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$, tel que pour tout $z \in A$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|F_n(z)| \leq M$ (on dit que la suite (F_n) est uniformément bornée).

III.5.a Démontrer que la suite $(a_n F_n)$ converge uniformément sur A et que la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} (a_k - a_{k+1}) F_k$ converge normalement sur A .

III.5.b A l'aide d'une transformation d'Abel, en déduire que la série de fonctions $\sum a_n f_n$ converge uniformément sur A .

III.6. Exemple.

Pour x réel et n entier naturel non nul, $u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

III.6.a Démontrer que pour $x \in \mathbb{R}$, $1 - e^{ix} = -2i \sin(x/2)e^{ix/2}$.

Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge uniformément sur tout intervalle

$[a, 2\pi - a]$ où $a \in]0, \pi[$.

En déduire que la fonction U est continue sur l'intervalle $]0, 2\pi[$.

III.6.b Pour p entier naturel, on considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} v_n$ où pour x réel et n

entier naturel non nul, $v_n(x) = \frac{\sin(nx) \sin(px)}{\sqrt{n}}$.

Démontrer que, pour tout entier naturel p , la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge uniformément sur l'intervalle $[0, \pi]$.

On pourra, par exemple, utiliser sans démonstration, que :

$$\text{pour tout } x \in [0, \pi], \quad \frac{x}{\pi} \leq \sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

III.6.c On se propose dans cette question de démontrer que la fonction U n'est pas continue par morceaux sur \mathbb{R} .

Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que la fonction U est continue par morceaux sur \mathbb{R} .

i. Déterminer alors les coefficients de Fourier de la fonction U .

On pourra utiliser pour p et n entiers naturels non nuls :

$$p \neq n, \quad \int_0^\pi \sin(nx) \sin(px) dx = 0 \quad \text{et pour } p = n \quad \int_0^\pi \sin(nx) \sin(px) dx = \frac{\pi}{2}.$$

ii. En utilisant la formule de Parseval, aboutir à une contradiction.

Troisième partie : convergence uniforme d'une série entière

III.7. Si $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est une série entière de la variable complexe de rayon $R > 0$, rappeler le résultat du cours concernant la convergence uniforme de cette série.

III.8. On considère la série entière de la variable complexe $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ de rayon 1.

III.8.a On note $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

Démontrer que la série entière de la variable réelle $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas uni-

formément sur $] -1, 1[$ (en particulier la série $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas uniformément sur D).

III.8.b On pourra confondre un point de \mathbb{R}^2 et son affixe.

Pour $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on note D_α l'ensemble des complexes z , tels que $|z| \leq 1$ et dont la partie réelle vérifie $\operatorname{Re}(z) \leq \cos \alpha$.

Représenter géométriquement l'ensemble D_α dans un repère orthonormé du plan.

III.8.c Démontrer que D_α est une partie fermée de \mathbb{C} .

On pourra écrire :

$$D_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq \cos \alpha\}$$

et démontrer que D_α est une partie fermée de \mathbb{R}^2 .

En déduire que D_α est une partie compacte de \mathbb{C} .

III.8.d On note pour $z \in \mathbb{C}$ et n entier naturel, $F_n(z) = \sum_{k=0}^n z^k$.

Démontrer que pour tout $z \in D_\alpha$ et tout entier naturel n , si $x = \operatorname{Re}(z)$:

$$|F_n(z)| \leq \frac{2}{1-x} \leq \frac{2}{1-\cos \alpha}.$$

III.8.e Démontrer que la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ converge uniformément sur tous les compacts

D_α (pour $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$).

Corrigé

Première partie Convergence des séries par transformation d'Abel

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La somme

$$\sum_{k=0}^n a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n a_k (B_k - B_{k-1})$$

s'écrit aussi sous la forme

$$\sum_{k=0}^n a_k B_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} B_k = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n.$$

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1}$, donc la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} (a_k - a_{k+1})$ converge puisque la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

b) D'après la transformation précédente, on déduit que la nature de la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k b_k$ est celle

de la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} u_k$ avec $u_k = (a_k - a_{k+1}) B_k$, car $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n B_n = 0$.

La différence $a_k - a_{k+1}$ étant positive puisque $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante, on a $|u_k| \leq M(a_k - a_{k+1})$ où $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} |B_n|$, donc

$$\sum_{k=0}^n |u_k| \leq M \sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1}) = M(a_0 - a_{n+1}).$$

La somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} |u_k|$, à termes positifs, étant majorée par $M a_0$, cette série converge donc absolument, donc convergente.

c) Dans ce cas la somme $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$ est égale soit à 1 soit à 0, donc elle est majorée. D'où la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n a_n$.

3. a) Puisque $\theta \neq 2k\pi$, alors $e^{i\theta} \neq 1$ et par conséquent :

$$\sum_{k=1}^n e^{ik\theta} = e^{i\theta} \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}} = e^{i\theta} \frac{e^{\frac{inx}{2}} e^{-\frac{in\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}}{e^{\frac{i\theta}{2}} e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}} = e^{i(n+1)\frac{\theta}{2}} \frac{\sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

b) Les deux séries $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\cos n\theta}{n^\alpha}$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\sin n\theta}{n^\alpha}$ sont toutes deux convergentes si et seulement si, la série

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{\cos n\theta}{n^\alpha} + i \frac{\sin n\theta}{n^\alpha} \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$$

est convergente. Mais $\forall n \in \mathbb{N}^* |e^{in\theta}| = 1$ donc $\left| \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha} \right| = \frac{1}{n^\alpha}$, donc

- si $\alpha > 1$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est absolument convergente donc convergente, d'après le théorème de Riemann.

- si $\alpha \leq 0$, le terme général de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini, donc cette série diverge.

- soit $\alpha \in]0, 1]$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^* a_n = \cos n\theta$ (resp. $\sin n\theta$) et $b_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Clairement $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de limite 0, et il résulte de la question 3.a :

$$\exists M = \frac{1}{|\sin \frac{\theta}{2}|} > 0 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}^*, |A_n| \leq M.$$

Donc d'après la question 1. la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\cos n\theta}{n^\alpha}$ (resp. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\sin n\theta}{n^\alpha}$) converge.

En conclusion, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est convergente sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ si et seulement si, $\alpha > 0$.

4. D'après la question 3., la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ converge pour tout point $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Lorsque $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, il s'agit de la série nulle, donc la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ converge simplement sur \mathbb{R} .

Deuxième partie

Convergence uniforme de séries

5. a) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in A$, $|F_n(z)| \leq Ma_n$, donc la suite de fonctions $(a_n F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur A . D'autre part, comme dans la question 1., on a

$$\forall z \in A, \forall k \in \mathbb{N}, |(a_k - a_{k+1})F_k(z)| \leq M(a_k - a_{k+1}),$$

cet inégalité montre que la série de fonctions $\sum_{k \in \mathbb{N}} (a_k - a_{k+1})F_k$ converge normalement sur

A , car la série numérique $\sum_{k \in \mathbb{N}} (a_k - a_{k+1})$ converge.

- b) On remarque la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n f_n$ converge simplement sur A (toujours d'après

la question 1.), et que sa somme vaut $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+1})F_n(z) + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n F_n(z)$, donc on peut conclure que la convergence est uniforme sur A , car la suite et la série convergent uniformément sur A .

6. EXEMPLE

- a) Il est clair que $1 - e^{ix} = e^{\frac{ix}{2}}(e^{-\frac{ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}}) = -2i \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{\frac{ix}{2}}$. Pour la convergence uniforme il suffit d'appliquer le résultat de la question 5. (b), avec $A = [a, 2\pi - a]$ et $f_k(x) = \sin(kx)$, en effet, on a :

$$\sum_{k=1}^n \sin(kx) = \operatorname{Im} \left(\sum_{k=1}^n e^{ikx} \right) = \sin(n+1) \frac{x}{2} \frac{\sin n \frac{x}{2}}{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}.$$

Donc

$$\forall x \in [a, 2\pi - a], \left| \sum_{k=1}^n \sin(kx) \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \leq \frac{1}{\sin \frac{a}{2}}.$$

Ce qui permet de conclure.

La continuité des applications $x \mapsto \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ et la convergence uniforme sur $[a, 2\pi - a]$ montrent que l'application $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ est continue sur $[a, 2\pi - a]$ et ceci pour tout $a \in]0, \pi[$, donc elle est continue sur $]0, 2\pi]$.

- b) Soit p un entier naturel fixé, on a :

$$\forall x \in]0, \pi], \left| \sum_{k=1}^n v_n(x) \right| = \left| \frac{\sin nx \sin px}{\sqrt{n}} \right| \leq \frac{|\sin px|}{\sin \frac{x}{2}} \leq \frac{px}{\pi} = p\pi$$

(on utilisé les inégalités $\sin px \leq px$ et $\frac{2}{\pi} \leq \sin\left(\frac{x}{2}\right)$). L'inégalité se prolonge pour $x = 0$. Donc, une autre fois, par application du résultat de la question 5., la série de fonctions

$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$ converge uniformément sur $[0, \pi]$.

- c) i. Notons $a_p = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos ptU(t)dt$ et $b_p = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin ptU(t)dt$ les coefficients de Fourier de U . Par parité, on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, a_p = 0 \text{ et } b_p = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin ptU(t)dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)dt.$$

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ étant uniformément convergente sur $[0, \pi]$, donc :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, b_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi\sqrt{n}} \int_0^{\pi} \sin pt \sin ntdt = \frac{2}{\pi\sqrt{p}} \int_0^{\pi} \sin^2 pt = \frac{1}{\sqrt{p}}.$$

ii. Puisque U est 2π -périodique et supposée continue par morceaux sur \mathbb{R} , donc on peut lui appliquer la formule de Parseval :

$$a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U^2(t) dt.$$

D'où l'égalité contradictoire, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(t) dt < \infty$, car la série harmonique

$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge. Donc l'hypothèse " U est continue par morceaux sur \mathbb{R} " est fausse.

Troisième partie

Convergence uniforme d'une série entière

7. Le lemme d'Abel montre que toute série entière de rayon de convergence $R > 0$ est uniformément convergente sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon $r < R$.
8. a) Raisons par l'absurde, en supposant la série uniformément convergente sur $] -1, 1[$, en particulier sur $[0, 1[$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in [0, 1[$ et $\forall n \geq p \geq n_0$, on a :

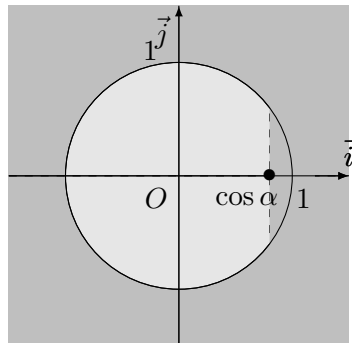
$$\sum_{k=p}^n \frac{x^k}{\sqrt{k}} < \varepsilon.$$

Par passage à la limite quand x tend vers 1 par des valeurs inférieures, on obtient

$$\sum_{k=p}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < \varepsilon.$$

Ceci est absurde car la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

b)



Le domaine D_α

c) Les applications $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ et $(x, y) \mapsto x$ sont continues sur \mathbb{R}^2 , donc D_α paraît comme intersection de deux fermés, donc c'est un fermé de \mathbb{R}^2 . Comme D_α est borné (partie de la boule unité), donc c'est un compact de \mathbb{R}^2 , car \mathbb{R}^2 est de dimension finie.

d) Pour tout $z \in D_\alpha$, $z \neq 1$. Donc $F_n(z) = \frac{1 - z^n}{1 - z}$ et donc $|F_n(z)| \leq \frac{1 + |z|^{n+1}}{|1 - z|} \leq \frac{2}{|1 - z|}$.
D'autre part, si $|1 - z|^2 = (1 - x)^2 + y^2 \geq (1 - x)^2$. Mais $x \leq \cos \alpha < 1$, donc $|1 - z| \geq 1 - x \geq 1 - \cos \alpha$. D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in D_\alpha, |F_n(z)| \leq \frac{2}{1 - x} \leq \frac{2}{1 - \cos \alpha}.$$

e) On est dans la situation de la question 5., en effet, la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0, la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=1}^n z^k\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est uniformément bornée sur D_α , donc on peut conclure : La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ converge uniformément sur toute partie de la forme D_α .

•••••