

PREPARATION CONCOURS
Analyse

Séries Et Intégrals

Partie I : Les Outils Concours

① Intégrals de Wallis

on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt$

② Mg $W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{n+1}{2}}} dt$

③ Mg $W_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2n}$

② Formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

on pose $x_n = \frac{n!}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n}\right)^n$

① Mg x_n wge vers $l > 0$

indic : Etudier la wge de $\sum \ln \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$

③ Mg $l = \sqrt{2\pi}$ indic : Etudier $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{x_{2n}}\right)$

③ Conclure

③ Intégrale de Gauss : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Mg $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge et est égal à $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

indice: Étudier la convergence de $f_n(t) = \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n$ si $0 \leq t \leq \sqrt{n}$
 0 sinon

④ Lemme de Lebesgue

Mg $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt = 0$

$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = 0$

$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt = 0$

pour toute $f \in \mathcal{L}^1([a, b])$

⑤ Noyau de Dirichlet

on pose $D_n(t) = \sum_{k=1}^n \cos(kt)$

① Vérifier que $D_n(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} - 1 \right)$

$\forall t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$

② En déduire que $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)u)}{\sin u} du = \frac{\pi}{2}$

justifier la convergence de l'intégrale

③

⑥ Intégrale de Dirichlet : $\boxed{I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt}$

(i) Mq I est semi-cvge

(ii) Mq $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$
est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}

(iii) En deduire que $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}}$

⑦ Formule d'Euler : $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

(i) Trouver α, β tq $\frac{1}{n^2} = \int_0^{\pi} (\alpha t^2 + \beta t) \cos(nt) dt$

(ii) En deduire que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} f(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt$
ou $f(t) = \frac{t^2/2\pi - t}{2 \sin(\pi/2)}$

(iii) En deduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

③

⑧ Comparaison $\Sigma - \int$

Soit $a \in \mathbb{N}$ et $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux
décroissante et positive

(i) $\forall n \geq a, \forall m \geq a$ on a

$$\left| \int_{n-1}^m f(t) dt \leq \sum_{k=n}^m f(k) \leq \int_n^{m+1} f(t) dt \right|$$

(ii) En deduire que $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et $\sum_{k \geq a} f(k)$ sont de même nature

Partie II cte γ d'Euler

on pose $\gamma_n = H_n - \ln(n+1)$ ou $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

① $\forall n, H_n \sim_{\text{av}} \ln(n)$

② $\forall n, (\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que sa limite $\left[\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n \in (0, 1) \right]$

③ En deduire que $\left[H_n \sim \gamma + \ln n + o(1) \right]$

④ Étudier la convergence de $\sum_{k \geq 2} \left(\ln\left(\frac{k}{k-1}\right) - \frac{1}{k} \right)$

⑤ Vérifier que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{k}{k-1}\right) - \frac{1}{k} \right) = H_n - \ln n - \gamma$

⑥ En deduire que $\left[H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]$

④

(7) Vérifier que $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} \right) - 2 \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right] = \gamma - H_n + \ln n + \frac{1}{2n}$

(8) En déduire que
$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

(9) Mg $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$ converge et que $I = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$
 où $a > 0, b > 0$ et $a \leq b$

car
$$e^{-bx} \ln \frac{b}{a} \leq \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq e^{-ax} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

(10) En déduire que
$$\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt$$

 étudier la convergence d'abord

(11) Mg $\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt$ converge

(i) Mg $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\ln \varepsilon + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt \right) = 0$

(ii) Vérifier que $\gamma + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_0^{\varepsilon} e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt$

(iv) En déduire que
$$\gamma = - \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt$$

(5)

Partie III

Fct Gamma d'Euler

pour tout $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

(1) Mq $\Gamma(x)$ est bien définie pour tout $x > 0$

(2) Mq l'app $x \mapsto \Gamma(x)$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$
donner $\Gamma^{(n)}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x > 0$

(3) (i) Vérifier que $\boxed{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)}$ pour tout $x > 0$

(ii) En deduire que $\boxed{\Gamma(n) = (n-1)!}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

(4) (i) Calculer $\Gamma(1/2)$

(ii) En deduire $\Gamma(n + \frac{1}{2})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

(5) (i) Mq $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$

(ii) En deduire que $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} dx$

(iii) Conclure que

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{\prod_{k=0}^{n-1} (x+k)}$$

formule de Gauss

(iv) En deduire que $\boxed{\binom{n+m}{n} \sim_{n \rightarrow +\infty} n^m}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ fixe

(6) Mg $\left[\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\delta x} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} \right] \quad \forall x > 0$

Formule de Weierstrass

Indice $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} (H_n - \ln n)$

(7) Une application : Mines 2019

(i) Eq d'Airy : Mg l'eq $\begin{cases} x''(t) = t x(t) \\ x(0) = 1, x'(0) = 0 \end{cases}$

admet une sol unique définie sur \mathbb{R}

(ii) Exprimer le DSE $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$

(iii) Mg $a_{3n} \sim \frac{\Gamma(2/3) n^{1/3}}{9^n (n!)^2} \sim n^{-1/6} \frac{\Gamma(2/3)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \frac{1}{(2n)!}$

(iv) En deduire une cté C, à exprimer en fct de $\Gamma(2/3)$

$\hookrightarrow \left[f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} C t^{-1/4} e^{\frac{2}{3} t^{3/2}} \right]$

(7)

Partie IV / Fct Beta d'Euler

pour tout $x > 0, y > 0$ on pose

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

(1) Montrer que $B(x, y)$ est bien définie pour tout $x > 0, y > 0$

(2) Etablir que (i) $B(x, y) = B(y, x)$

(ii) $B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$

(3) En déduire que $B(x+1, y+1) = \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)} B(x, y)$

(4) Exprimer $B(n, m)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^+, m \in \mathbb{N}^+$

(5) on suppose ds cette qst $x > 1, y > 1$

(i) Montrer que $B(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du$

(ii) Montrer que $F(t) = \int_0^t e^{-u} u^{x+y-1} du \leq \Gamma(x+y)$

(iii) En déduire que $G(t) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F((1+u)t) du$ est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$

(iv) Exprimer $G'(t)$ en fait de $\Gamma(x)$, e^{-t} et t^{y-1}

(6) En déduire que $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ pour tout $x > 0, y > 0$

(7) Retrouver autrement le résultat de qst 4

(7)

Partie I

Et Digamma d'Euler

Pour tout $x > 0$, on pose $\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$

① Mg la fct $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k} \right)$

est bien définie et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$
donner $f'(x)$ pour tout $x > 0$

② En déduire que $\Psi(x) = -\frac{1}{x} + \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right)$
pour tout $x > 0$

③ En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t \, dt = -\gamma$

④ Mg pour tout $n \geq 2$, on a $\Psi(n) = -\gamma + H_{n-1} \sim \ln n$ $(n \rightarrow +\infty)$

⑤ Une application en proba : CCP 2016

III.9. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n .

On effectue un premier tirage d'une boule dans l'urne et on adopte le protocole suivant :

si on a tiré la boule numéro k , on la remet alors dans l'urne avec k nouvelles boules toutes numérotées k .

Par exemple, si on a tiré la boule numéro 3, on remet quatre boules de numéro 3 dans l'urne (la boule tirée plus 3 nouvelles boules numéro 3).

On effectue ensuite un deuxième tirage d'une boule.

On note X (respectivement Y) la variable aléatoire égale au numéro de la boule choisie au premier tirage (respectivement au deuxième tirage).

III.9.a. Déterminer la loi de la variable aléatoire X ainsi que son espérance $E(X)$.

III.9.b. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y et vérifier que pour tout entier naturel non nul k , $P(Y = k) = \frac{1}{n} \left(\psi(2n+1) - \psi(n+1) + \frac{k}{n+k} \right)$.

9

III.9.c. Calculer l'espérance $E(Y)$. On pourra utiliser, sans démonstration, que

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n(n+k)} = \frac{1-n}{2} + n(\psi(2n+1) - \psi(n+1)).$$

(8) a) Ma $\frac{\partial B}{\partial y}(x,y) = B(x,y) (\psi(y) - \psi(x+y))$

(ii) En deduire que ψ est \nearrow

Partie VI / Fcts de Riemann

pour tout $x > 1$ on pose $\boxed{\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}}$ dzeta

et pour $x > 0$, on pose $\boxed{\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}}$ Eta

(1) Ma $x \mapsto \zeta(x)$ est bien définie et de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$
 donner $\zeta^{(n)}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x > 1$

(2) Ma $\boxed{\zeta(x) \sim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1}}$

(3) Ma $x \mapsto \eta(x)$ est bien définie et de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$

(4) Etablir que $\boxed{\eta(x) = (1 - 2^{1-x}) \zeta(x)}$
 pour tout $x > 0$

(5) En deduire que $\boxed{\eta(1) = \ln 2}$

(6) Ma $\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \lambda + o(1)$ où $\lambda = \text{cte}$ à exprimer en fct de $\eta'(1)$

(10)

(7) a) Mq $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \right)$ cvge unif sur $(1, 2)$

et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \right) = \zeta(x) - \frac{1}{x-1}$

(ii) En deduire que $\left[\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + o(1) \right]$

(8) En deduire que $\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln n}{n} = \ln 2 \left(\frac{1}{2} - \gamma \right) \right]$

(9) App: DSE de $\psi(x)$ au vois de 1

a) Mq $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$ est bien defini
et de classe \mathcal{C}^∞ sur $(-1, +\infty[$

(ii) Exprimer $f^{(k)}(0)$ en fet de $\zeta(k+1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

(iii) Mq f est DSE sur $] -1, 1[$

(iv) Etablir que $\left[\psi(x+1) = \psi(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \zeta(n+1)}{x^n} \right]$

(v) En deduire que $x \mapsto \psi(x)$ est DSE au vois de 1
exprimer $\psi^{(n)}(1)$ en fet de $\zeta(n+1)$

(vi) Que devient ce resultat pour $n=1$

FIN et BONNE
CHANCE