Préparation aux Concours (CNC-CCP)

Suites de Fonctions

Exercice 1 - Un théorème de Dini

Soit (f_n) une suite croissante (ie $f_n \leq f_{n+1}$) de fonctions continues sur un segment $[a,b]$ qui converge simplement vers une fonction f continue. Pour $\varepsilon > 0$ et $n \geq 1$, on pose

$$K_n(\varepsilon) = \{x \in [a,b];\ |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}.$$

1. Justifier que si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n tel que $K_n(\varepsilon) = \varnothing$, alors (f_n) converge uniformément vers f.

2. Démontrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

Exercice 2 - Deuxième théorème de Dini

Soit $I = [a,b]$ et (f_n) une suite de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ telle que (f_n) converge simplement vers f sur I. On suppose aussi que chaque fonction f_n est croissante, et que f est continue. On fixe $\varepsilon > 0$.

1. Justifier l'existence de $\eta > 0$ tel que, pour tous $x, y \in [a,b]$,

$$|x - y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

2. Soit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b$ une subdivision de $[a,b]$ avec $x_{i+1} - x_i < \eta$ pour tout $i = 0, \ldots, p-1$. Démontrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$ et tout $i \in \{0, \ldots, p\}$,

$$|f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon.$$

3. Soit $y \in I$ et soit $i \in \{0, \ldots, p\}$ tel que $y \in [a_i, a_{i+1}]$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x_i) - f_n(x_{i+1}) \leq f(y) - f_n(y) \leq f(x_{i+1}) - f_n(x_i).$$

4. En déduire que (f_n) converge uniformément vers f sur I.

Corrigé

Exercice 1

1. Remarquons d'abord que pour chaque n, on a $f_n \leq f$, et donc

$$K_n(\varepsilon) = \{x \in [a,b];\ f(x) - f_n(x) \geq \varepsilon\}.$$

D'autre part, puisque $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, on a $K_{n+1}(\varepsilon) \subset K_n(\varepsilon)$. Si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n tel que $K_n(\varepsilon) = \varnothing$, alors pour tout $p \geq n$, $K_p(\varepsilon)$ est vide, et ceci revient à dire que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$.
2. On raisonne par l'absurde et on suppose que pour chaque n, on peut trouve $x_n \in K_n(\varepsilon)$. Par compacité de $[a,b]$, il existe une sous-suite telle que $(x_{\varphi(n)})$ converge vers $x \in [a,b]$.
Fixons maintenant p un entier. Pour n assez grand, $\varphi(n) \geq p$ et donc

$$f(x_{\varphi(n)}) - f_p(x_{\varphi(n)}) \geq f(x_{\varphi(n)}) - f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) \geq \varepsilon.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on trouve, puisque f_p et f sont continues,

$$f(x) - f_p(x) \geq \varepsilon.$$

Comme p est arbitraire, cela contredit la convergence de $(f_p(x))$ vers $f(x)$.

Exercice 2

1. Il s'agit uniquement d'utiliser que f continue sur $[a,b]$ est uniformément continue sur ce segment.
2. Pour chaque $i = 0, \dots, p$, puisque $(f_n(x_i))$ converge vers $f(x_i)$, il existe $n_i \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_i$, $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$. Il suffit ensuite de choisir $N = \max(n_i :\ i = 0, \dots, p)$.
3. Puisque chaque f_n est croissante, en passant à la limite dans les inégalités, f est croissante également. On a donc :

$$f(x_i) \leq f(y) \leq f(x_{i+1})$$

et

$$-f_n(x_{i+1}) \leq -f_n(y) \leq -f(x_i).$$

Il suffit de sommer ces deux inégalités pour trouver le résultat.
4. On a d'une part

$$f(x_{i+1}) - f_n(x_i) \leq f(x_{i+1}) - f(x_i) + f(x_i) - f_n(x_i) \leq 2\varepsilon$$

en utilisant le résultat des questions 1. et 2. D'autre part, on a également

$$f(x_i) - f_n(x_{i+1}) \geq f(x_i) - f(x_{i+1}) + f(x_{i+1}) - f_n(x_{i+1}) \geq 2\varepsilon.$$

On a donc prouvé que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on a

$$-2\varepsilon \leq f(y) - f_n(y) \leq 2\varepsilon.$$

C'est bien que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$.