

Préparation aux Concours (CNC-CCP)

Espaces Vectoriels Normés

Distance à un hyperplan et norme subordonnée

Partie II

H est un hyperplan d'un \mathbb{R} -espace vectoriel normé E , h une forme linéaire non nulle sur E dont le noyau est égal à H .

1) Dans cette question E est un \mathbb{R} -espace vectoriel normé de dimension finie, on désigne par x_0 un vecteur de E .

a) On note $d(x_0, H)$ la distance de x_0 à l'hyperplan H . Montrer qu'il existe une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de H tels que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_0 - y_n\| = d(x_0, H)$$

b) Montrer qu'il existe une suite $(y_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ extraite de la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un élément de H .

c) En déduire qu'il existe b appartenant à l'hyperplan H tel que :

$$d(x_0, H) = \|x_0 - b\|$$

On dit alors que la distance de x_0 à l'hyperplan H est atteinte en b .

2) On suppose dans cette question que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel normé de dimension quelconque.

a) Montrer que, si h est une forme linéaire continue sur E , alors le noyau, $\ker(h)$, est fermé dans E .

b) Montrer que, si le noyau de h est fermé, alors h est continue.

Indication : on pourra raisonner par l'absurde.

c) Montrer que, si H est un hyperplan de E , alors l'adhérence \overline{H} de H est un sous-espace vectoriel de E .

d) En déduire que tout hyperplan de E est fermé ou dense dans E .

Partie III

On suppose dans cette partie que E est un \mathbb{R} -espace muni d'un produit scalaire (espace préhilbertien) $(\cdot | \cdot)$, et que H est un hyperplan dense dans E .

1) Déterminer H^\perp , l'orthogonal de H .

Rappel : $H^\perp = \{x \in E / \forall y \in H (x | y) = 0\}$

2) Que dire de $H \oplus H^\perp$?

3) Pour tout vecteur x de E , calculer la distance $d(x, H)$.

4) La distance $d(x, H)$ est-elle toujours atteinte ? Justifier.

Partie IV

On suppose, dans cette partie, que H est un hyperplan fermé d'un \mathbb{R} -espace vectoriel normé E de dimension quelconque. H est le noyau de la forme linéaire h , continue, non nulle sur E . x_0 désigne un vecteur fixé de E .

1) On considère $\mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$ l'ensemble des formes linéaires continues définies sur E .

Sur cet espace vectoriel on définit l'application suivante :

$$\begin{aligned} ||| \cdot ||| : \mathcal{L}_c(E, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ f &\longmapsto \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \end{aligned}$$

Montrer que cette application est correctement définie et définit une norme sur $\mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$.

On appelle cette norme, norme subordonnée à $\| \cdot \|$.

2) a) Montrer que, pour tout $y \in H$ on a :

$$\|x_0 - y\| \geq \frac{|h(x_0)|}{|||h|||}$$

b) En déduire que la distance de x_0 à H est supérieure ou égale à $\frac{|h(x_0)|}{|||h|||}$.

c) Montrer que $d(x_0, H) = 0$ si et seulement si $x_0 \in H$.

d) On considère dans cette question $x \notin H$.

i) Montrer qu'il existe une suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $E \setminus \{0\}$ vérifiant :

$$|||h||| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|}$$

ii) Montrer que, pour tout entier n , il existe un réel λ_n non nul et un vecteur y_n de H tel que $w_n = \lambda_n x_0 + y_n$.

iii) Prouver que, pour tout entier n :

$$\frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} \leq \frac{|h(x_0)|}{d(x_0, H)}$$

e) En déduire que, pour tout vecteur x_0 de E , on a

$$d(x_0, H) = \frac{|h(x_0)|}{|||h|||}$$

3) Dans cette question, E est l'ensemble des suites réelles de limite nulle, on munit cet ensemble de la norme infinie, c'est à dire que, si u est un élément de E avec $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

h est l'application définie sur E dans \mathbb{R} par :

$$h(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$$

a) Montrer que la série $\sum \frac{u_n}{2^{n+1}}$ est convergente.

b) Montrer que h est une forme linéaire continue non nulle sur E et que $|||h||| \leq 1$.

c) Soit $(v_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E , on notera $v_p(n)$ le terme de rang n de la suite v_p . On définit v_p par :

$$\begin{cases} v_p(n) = 1 & \text{si } 0 \leq n \leq p \\ v_p(n) = 0 & \text{si } n > p \end{cases}$$

Calculer $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{|h(v_p)|}{\|v_p\|_\infty}$, en déduire $|||h|||$.

Corrigé

Partie II

H est un hyperplan d'un \mathbb{R} -espace vectoriel normé E , h une forme linéaire non nulle sur E dont le noyau est égal à H .

1) Dans cette question E est un \mathbb{R} -espace vectoriel normé de dimension finie, on désigne par x_0 un vecteur de E .

a) On note $d(x_0, H)$ la distance de x_0 à l'hyperplan H . Montrer qu'il existe une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de H tels que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_0 - y_n\| = d(x_0, H)$$

Correction : Par caractérisation de la borne inférieure, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists y \in H$, $d(x_0, H) \leq \|x_0 - y\| < d(x_0, H) + \varepsilon$. On applique ceci à $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et on note y_n un des $y \in H$ vérifiant l'inégalité. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n \in H \quad \text{et} \quad d(x_0, H) \leq \|x_0 - y_n\| < d(x_0, H) + \frac{1}{n+1}$$

donc il existe une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n \in H$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_0 - y_n\| = d(x_0, H)$.

b) Montrer qu'il existe une suite $(y_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ extraite de la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un élément de H .

Correction : On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|y_n\| = \|y_n - x_0 + x_0\| \leq \|y_n - x_0\| + \|x_0\|$ et la suite $(\|x_0 - y_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée puisqu'elle converge donc la suite $(\|y_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi bornée. Le théorème de Bolzano-Weierstrass donne alors l'existence d'une suite $(y_{\varphi(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ extraite de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge dans E . Mais, quand E est de dimension finie, tous ses sous-espaces vectoriels sont fermés donc H est fermé. Comme $\forall p \in \mathbb{N}$, $y_{\varphi(p)} \in H$, on a $z_0 = \lim_{p \rightarrow +\infty} y_{\varphi(p)} \in H$. D'autre part, la suite $(\|x_0 - y_{\varphi(p)}\|)_{p \in \mathbb{N}}$ est extraite de la suite $(\|x_0 - y_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $d(x_0, H)$ donc elle converge vers la même limite. Enfin, par continuité de la norme, $\|x_0 - y_{\varphi(p)}\| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \|x_0 - z_0\|$ et donc, par unicité de la limite, $\|x_0 - z_0\| = d(x_0, H)$.

En conclusion, $\exists z_0 \in H$, $\|x_0 - z_0\| = d(x_0, H)$.

c) En déduire qu'il existe b appartenant à l'hyperplan H tel que :

$$d(x_0, H) = \|x_0 - b\|$$

On dit alors que la distance de x_0 à l'hyperplan H est atteinte en b .

Correction : cf plus haut avec $b = z_0$.

2) On suppose dans cette question que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel normé de dimension quelconque.

a) Montrer que, si h est une forme linéaire continue sur E , alors le noyau, $\ker(h)$, est fermé dans E .

Correction : Par définition, $\ker(h) = h^{-1}(\{0\})$ et le singleton $\{0\}$ est un fermé de \mathbb{R} . Or l'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé donc

si h est continue alors $\ker(h)$ est fermé dans E .

b) Montrer que, si le noyau de h est fermé, alors h est continue.

Indication : on pourra raisonner par l'absurde.

Correction : Supposons que la forme linéaire h ne soit pas continue, on a

$\text{non} \left(\exists K \geq 0, \forall x \in E, |h(x)| \leq K \|x\| \right)$ soit $\forall K \geq 0, \exists x \in E, |h(x)| > K \|x\|$.

Appliquons ceci à $K = n + 1$ pour $n \in \mathbb{N}$ et notons x_n un $x \in E$ vérifiant la propriété : on a donc $|h(x_n)| > (n + 1) \|x_n\|$. Ceci montre que $h(x_n) \neq 0$, on peut donc poser $t_n = \frac{x_n}{h(x_n)}$. On a

alors $h(t_n) = \frac{h(x_n)}{h(x_n)} = 1$ et $\|t_n\| = \frac{\|x_n\|}{|h(x_n)|} < \frac{1}{n+1}$ donc $t_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0_E$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, h(t_n - t_0) = h(t_n) - h(t_0) = 1 - 1 = 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, t_n - t_0 \in H$ et $t_n - t_0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -t_0$ donc, puisque H est fermé, $-t_0 \in H$.

Mais ceci est faux car $h(-t_0) = -h(t_0) = -1$.

L'hypothèse de départ était donc fautive et on a bien si $\ker(h)$ est fermé dans E alors h est continue.

c) Montrer que, si H est un hyperplan de E , alors l'adhérence \overline{H} de H est un sous-espace vectoriel de E .

Correction : $\overline{H} \supset H$ donc $\overline{H} \neq 0$ et si $(x, y) \in \overline{H}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, la caractérisation séquentielle de l'adhérence donne l'existence de deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, (x_n, y_n) \in H^2$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y$ et alors, par linéarité de la limite, $x + \lambda y = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n + \lambda y_n)$

avec $\forall n \in \mathbb{N}, x_n + \lambda y_n \in H$ et donc $x + \lambda y \in \overline{H}$. Donc \overline{H} est un sous-espace vectoriel de E .

d) En déduire que tout hyperplan de E est fermé ou dense dans E .

Correction : Puisque $H \subset \overline{H}$, on a soit $H = \overline{H}$ et, dans ce cas, H est fermé, soit $H \subsetneq \overline{H}$. Si

$H \subsetneq \overline{H}$, prenons $a \in \overline{H} \setminus H$ et soit $x \in E$ quelconque. On a $h(a) \neq 0$ puisque $a \notin H$ et on peut

donc écrire $x = \frac{h(x)}{h(a)} a + \left(x - \frac{h(x)}{h(a)} a\right)$ avec $a \in \overline{H}$ et $h\left(x - \frac{h(x)}{h(a)} a\right) = h(x) - \frac{h(x)}{h(a)} h(a) = 0$ donc

$\left(x - \frac{h(x)}{h(a)} a\right) \in H \subset \overline{H}$. Puisque \overline{H} est un sous-espace vectoriel de E , on a donc $x \in \overline{H}$ ce qui donne $E \subset \overline{H}$.

On peut donc conclure : H est fermé ou dense.

Partie III

On suppose dans cette partie que E est un \mathbb{R} -espace muni d'un produit scalaire (espace préhilbertien) $(\cdot | \cdot)$, et que H est un hyperplan dense dans E .

1) Déterminer H^\perp , l'orthogonal de H .

Rappel : $H^\perp = \{x \in E / \forall y \in H (x | y) = 0\}$

Correction : Soit $x \in H^\perp$. Par densité de H dans E , il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in H$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$. On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, (x | x_n) = 0$. Mais, par continuité du produit scalaire, $(x | x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (x | x)$ donc $(x | x) = 0$ et donc $x = 0_E$. Réciproquement $0_E \in H^\perp$

donc $H^\perp = \{0_E\}$

2) Que dire de $H \oplus H^\perp$?

Correction : $H \oplus H^\perp = H \oplus \{0_E\}$ donc $H \oplus H^\perp = H$.

3) Pour tout vecteur x de E , calculer la distance $d(x, H)$.

Correction : Pour tout $x \in E$, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in H$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$. On a, par définition, $0 \leq d(x, H) \leq \|x - x_n\|$ car $x_n \in H$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - x_n\| = 0$

donc $\forall x \in E, d(x, H) = 0$.

4) La distance $d(x, H)$ est-elle toujours atteinte ? Justifier.

Correction : Si $d(x, H)$ est atteinte, il existe $z_0 \in H$ tel que $0 = d(x, H) = \|x - z_0\|$ donc $x = z_0$ et $x \in H$. La réciproque est claire donc $d(x, H)$ n'est atteinte que si $x \in H$.

Partie IV

On suppose, dans cette partie, que H est un hyperplan fermé d'un \mathbb{R} -espace vectoriel normé E de dimension quelconque. H est le noyau de la forme linéaire h , continue, non nulle sur E . x_0 désigne un vecteur fixé de E .

1) On considère $\mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$ l'ensemble des formes linéaires continues définies sur E .

Sur cet espace vectoriel on définit l'application suivante :

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathcal{L}_c(E, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ f &\longmapsto \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \end{aligned}$$

Montrer que cette application est correctement définie et définit une norme sur $\mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$.

On appelle cette norme, norme subordonnée à $\|\cdot\|$.

Correction : En ayant écouté en cours on peut faire facilement cette question.

2) a) Montrer que, pour tout $y \in H$ on a :

$$\|x_0 - y\| \geq \frac{|h(x_0)|}{\|h\|}$$

Correction : On a $\forall x \in E, |h(x)| \leq \|h\| \|x\|$ donc, pour $x = x_0 - y, |h(x_0)| \leq \|h\| \|x_0 - y\|$.

Or $\|h\| \neq 0$ car h est non nulle donc $\forall y \in H, \|x_0 - y\| \geq \frac{|h(x_0)|}{\|h\|}$.

b) En déduire que la distance de x_0 à H est supérieure ou égale à $\frac{|h(x_0)|}{\|h\|}$.

Correction : La borne inférieure étant le plus grand des minorants, $d(x_0, H) \geq \frac{|h(x_0)|}{\|h\|}$.

c) Montrer que $d(x_0, H) = 0$ si et seulement si $x_0 \in H$.

Correction : Si $d(x_0, H) = 0$, l'inégalité ci-dessus donne $|h(x_0)| = 0$ donc $x_0 \in H$. La réciproque est immédiate donc $d(x_0, H) = 0 \Leftrightarrow x_0 \in H$.

d) On considère dans cette question $x \notin H$.

i) Montrer qu'il existe une suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $E \setminus \{0\}$ vérifiant :

$$\|h\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|}$$

Correction :

Par caractérisation de la borne supérieure, $\forall \varepsilon > 0, \exists w \neq 0_E, \|h\| \geq \frac{|h(w)|}{\|w\|} > \|h\| - \varepsilon$.

On applique ceci à $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et on note w_n un de ces $w \neq 0_E$. On a $\forall n \in \mathbb{N}, \|h\| - \frac{1}{n+1} < \frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} \leq \|h\|$ donc

$$\text{il existe } (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ telle que } \forall n \in \mathbb{N}, w_n \in E \setminus \{0_E\} \text{ et } \|h\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|}$$

ii) Montrer que, pour tout entier n , il existe un réel λ_n non nul et un vecteur y_n de H tel que $w_n = \lambda_n x_0 + y_n$.

Correction : \diamond Puisque $x_0 \notin H$, on peut écrire tout $x \in E$ sous la forme $x = \frac{h(x)}{h(x_0)} x_0 + \left(x - \frac{h(x)}{h(x_0)} x_0\right) = \lambda x_0 + y$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y \in H$ (vérification immédiate). Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (\lambda_n, y_n) \in \mathbb{R} \times H, w_n = \lambda_n x_0 + y_n$.

◊ Erreur d'énoncé : la condition $\lambda_n \neq 0$ n'est, en général, pas vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il suffit, par exemple, de choisir $w_0 \in H$ pour avoir $\lambda_0 = 0$ car l'écriture ci-dessus est unique puisque la somme $\mathbb{R}.x_0 \oplus H$ est directe. On ne modifie pas la valeur de la limite de $\frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|}$ en modifiant la valeur de w_0 (ou d'un nombre fini de termes) donc $[\alpha]$ est toujours vérifié.

◊ Par contre, on a $\exists n_0, \forall n \geq n_0, \lambda_n \neq 0$ car $\frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|h\| > 0$ donc $\exists n_0, \forall n \geq n_0, \frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} > 0$ donc $\forall n \geq n_0, h(w_n) \neq 0$ et donc $\lambda_n = \frac{h(w_n)}{h(x_0)} \neq 0$.

iii) Prouver que, pour tout entier n :

$$\frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} \leq \frac{|h(x_0)|}{d(x_0, H)}$$

Correction : D'une part, $|h(w_n)| = |\lambda_n h(x_0) + y_n| = |\lambda_n| |h(x_0)|$ et, d'autre part, $\forall n \geq n_0, \|w_n\| = |\lambda_n| \left\| x_0 - \frac{-y_n}{\lambda_n} \right\| \geq |\lambda_n| d(x_0, H)$ car $\frac{-y_n}{\lambda_n} \in H$. Donc, puisque $\|w_n\| \neq 0, |\lambda_n| \neq 0$ pour $n \geq n_0$ et $d(x_0, H) \neq 0$ pour $x_0 \notin H$, on a

$$\forall n \geq n_0, \frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} = \frac{|\lambda_n| |h(x_0)|}{|\lambda_n| \|w_n\|} \leq \frac{|\lambda_n| |h(x_0)|}{|\lambda_n| d(x_0, H)} = \frac{|h(x_0)|}{d(x_0, H)}.$$

En faisant abstraction de l'erreur d'énoncé signalée plus haut, on a bien $\forall n \geq n_0, \frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} \leq \frac{|h(x_0)|}{d(x_0, H)}$.

e) En déduire que, pour tout vecteur x_0 de E , on a

$$d(x_0, H) = \frac{|h(x_0)|}{\|h\|}$$

Correction : En passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient $\|h\| \leq \frac{|h(x_0)|}{d(x_0, H)}$ donc $d(x_0, H) \leq \frac{|h(x_0)|}{\|h\|}$ et on a obtenu l'inégalité inverse au [c] donc $d(x_0, H) = \frac{|h(x_0)|}{\|h\|}$.

3) Dans cette question, E est l'ensemble des suites réelles de limite nulle, on munit cet ensemble de la norme infinie, c'est à dire que, si u est un élément de E avec $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$. h est l'application définie sur E dans \mathbb{R} par :

$$h(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$$

a) Montrer que la série $\sum \frac{u_n}{2^{n+1}}$ est convergente.

Correction : On a $\forall n \in \mathbb{N}, \left| \frac{u_n}{2^{n+1}} \right| \leq \frac{\|u\|_\infty}{2^{n+1}}$ et cette série majorante converge car c'est une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ donc $\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u_n}{2^{n+1}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est absolument convergente donc convergente.

b) Montrer que h est une forme linéaire continue non nulle sur E et que $\|h\| \leq 1$.

Correction : D'après [a], h est bien définie. Pour tout $(u, v) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$h(u + \lambda v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n + \lambda v_n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n}{2^{n+1}} = h(u) + \lambda h(v)$$

car toutes les séries convergent. Donc $h \in E^*$. D'autre part, l'inégalité vue au [a] donne

$$\forall u \in E, |h(u)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{u_n}{2^{n+1}} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|u_n|}{2^{n+1}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|u\|_\infty}{2^{n+1}} = \|u\|_\infty \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \|u\|_\infty$$

ce qui montre la continuité de h . De plus, $\forall u \neq 0, \frac{|h(u)|}{\|u\|_\infty} \leq 1$ donc, en prenant la borne supérieure, $\|h\| \leq 1$. Donc h est une forme linéaire continue et $\|h\| \leq 1$.

- c) Soit $(v_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E , on notera $v_p(n)$ le terme de rang n de la suite v_p . On définit v_p par :

$$\begin{cases} v_p(n) = 1 \text{ si } 0 \leq n \leq p \\ v_p(n) = 0 \text{ si } n > p \end{cases}$$

Calculer $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{|h(v_p)|}{\|v_p\|_\infty}$, en déduire $\|h\|$.

Correction : \diamond On a clairement $v_p \in E$ et $\|v_p\|_\infty = 1$. Or

$$h(v_p) = \sum_{n=0}^p \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^p \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^{p+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{p+1}} > 0$$

donc $\frac{|h(v_p)|}{\|v_p\|_\infty} = 1 - \frac{1}{2^{p+1}}$ et donc $\frac{|h(v_p)|}{\|v_p\|_\infty} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 1$.

\diamond On a $\frac{|h(v_p)|}{\|v_p\|_\infty} \leq \|h\| \leq 1$ donc $\|h\| = 1$.

- d) Montrer qu'il n'existe pas d'élément u non nul de E telle que :

$$\|h\| = \frac{|h(u)|}{\|u\|_\infty}$$

Correction : Supposons qu'il existe $u \neq 0_E$ tel que $\frac{|h(u)|}{\|u\|_\infty} = \|h\| = 1$ on a donc $|h(u)| = \|u\|_\infty$

et toutes les inégalités du [b] sont des égalités. En particulier, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|u_n|}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|u\|_\infty}{2^{n+1}}$ donc

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|u\|_\infty - |u_n|}{2^{n+1}} = 0$ avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{\|u\|_\infty - |u_n|}{2^{n+1}} \geq 0$ donc on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = \|u\|_\infty$. Mais alors $|u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|u\|_\infty \neq 0$ en contradiction avec le fait que $u \in E$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$.

Donc il n'existe pas de $u \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $\frac{|h(u)|}{\|u\|_\infty} = \|h\|$.

- e) On note H le noyau de h , vérifier que H est un hyperplan fermé de E .

Correction : Il suffit d'utiliser le résultat du [II.a] : puisque h est continue, $H = \ker h$ est fermé.

- f) Montrer que la distance d'un vecteur x de E à l'hyperplan H n'est pas toujours atteinte.

Correction : Soit $x_0 \notin H$, si $d(x_0, H)$ était atteinte alors $\exists z_0 \in H$, $d(x_0, H) = \|x_0 - z_0\|$. Or, selon [1.e], $d(x_0, H) = \frac{|h(x_0)|}{\|h\|}$ donc $\|x_0 - z_0\| = \frac{|h(x_0)|}{\|h\|} = \frac{|h(x_0) - h(z_0)|}{\|h\|}$ et donc, puisque $x_0 - z_0 \neq 0_E$, $\frac{|h(x_0 - z_0)|}{\|x_0 - z_0\|} = \|h\|$ ce qui est impossible vu [d]. Donc pour $x \notin H$, $d(x, H)$ n'est jamais atteinte.

d) Montrer qu'il n'existe pas d'élément u non nul de E telle que :

$$\|h\| = \frac{|h(u)|}{\|u\|_\infty}$$

e) On note H le noyau de h , vérifier que H est un hyperplan fermé de E .

f) Montrer que la distance d'un vecteur x de E à l'hyperplan H n'est pas toujours atteinte.