My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

Préparation aux Concours (CNC-CCP)

Esapces Vectoriels Normés

Normes matricielles subordonnées

p est un éléments de $\mathbb{N}^*$. $E = \mathcal{M}_p(K)$ où $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
$F = \mathcal{M}_{p,1}(K)$ identifié ici à K^p. F est muni d'une norme notée $||-||$.
L'ensemble des vecteurs de F de norme au plus égale à 1 est noté $\mathcal{B}_f$. C'est la boule fermée de centre $\overrightarrow{0_F}$ et de rayon 1. C'est une partie fermée et bornée de F, ev de dimension finie. $\mathcal{B}_f$ est un compact de F.

1. **Réel $N(A)$ associé à une matrice A**

   L'application $X \mapsto AX$ est un endomorphisme de F. Comme F est de dimension finie, cette application linéaire est continue.
   Par composition l'application $X \mapsto ||AX||$ est continue sur F. Elle transforme $\mathcal{B}_f$, fermé borné de F, en un compact de $\mathbb{R}$, c.a.d. un ensemble fermé borné, et non vide car $\mathcal{B}_f \neq \varnothing$.
   L'ensemble $\{||AX||/X \in \mathcal{B}_f\}$ est non vide et majoré. Il possède une borne supérieure. Cette borne supérieure est notée $N(A)$.

   $$\boxed{N(A) = \sup_{X \in \mathcal{B}_f} ||AX|| = \sup_{||X|| \leq 1} ||AX||}$$

   Exemple : Si $A = I_p$, matrice identité de E, $N(I_p) = \sup\limits_{||X|| \leq 1} ||X|| = 1$

2. **Première propriété de $N(A)$**

   Soit X un vecteur non nul de F. Le vecteur $X' = \dfrac{1}{||X|}|X$ est de norme 1.

   On a donc $||AX'|| \leq N(A)$ et :

   $$||AX'|| = \left|\left|A\left(\frac{1}{||X||}X\right)\right|\right| = \left|\left|\frac{1}{||X||}AX\right|\right| = \frac{1}{||X||}||AX||$$

   Comme $||X|| > 0$ on obtient : $||AX|| \leq N(A) \times ||X||$.
   Cette dernière inégalité est vraie également pour $X = \overrightarrow{0_F}$.

   $$\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(K), \quad ||AX|| \leq N(A) \times ||X||}$$

3. **N définit une norme dans E**

   - Pour toute matrice A de E, $N(A)$ est un réel positif.
   - Pour toute matrice A de E :
     $N(A) = 0 \Rightarrow \forall X \in F,\ 0 \leq ||AX|| \leq N(A)||X|| = 0$
     $N(A) = 0 \Rightarrow (\forall X \in F,\ ||AX|| = 0) \Rightarrow (\forall X \in F,\ AX = \overrightarrow{0_F})$.
     Notons $E_1, ..., E_p$ les vecteurs de la base canonique de F. Pour tout entier j de $\{1, ..., p\}$, les coordonnées du vecteur AE_j sont celle de la colonne j de A soit $(a_{1,j}, ..., a_{p,j})$.
     Par suite :
     $N(A) = 0 \Rightarrow \forall j \in \{1, ..., p\},\ AE_j = \overrightarrow{0_F} \Rightarrow \forall (i,j) \in \{1, ..., p\}^2,\ a_{i,j} = 0$
     Réciproquement $A = (0) \Rightarrow N(A) = 0$. On a bien : $N(A) = 0 \Leftrightarrow A = (0)$
   - $\forall A \in E, \forall \lambda \in K, \forall X \in \mathcal{B}_f$:
     $||(\lambda A)X|| = ||\lambda(AX)|| = |\lambda| \times ||AX|| \leq |\lambda| N(A)$
     Donc, par définition de la borne supérieure :

$N(\lambda A) = \sup\limits_{||X|| \leq 1} ||(\lambda A)X|| \leq |\lambda| N(A)$.
Si $\lambda \neq 0$, ce résultat peut s'appliquer à $\lambda' = 1/\lambda$ et $A' = \lambda A$.
$N\left(\frac{1}{\lambda}(\lambda A)\right) = N(A) \leq \frac{1}{|\lambda|} N(\lambda A)$.
On obtient l'inégalité dans les deux sens. Comme l'égalité est trivialement vraie pour $\lambda = 0$, on a :

$$\forall A \in E, \forall \lambda \in K, \; N(\lambda A) = |\lambda| N(A)$$

- $\forall (A, B) \in E^2, \forall X \in \mathcal{B}_f$:
  $||(A+B)X|| = ||AX + BX|| \leq ||AX|| + ||BX|| \leq N(A) + N(B)$
  Par définition de la borne supérieure :
  $\forall (A, B) \in E^2, \; N(A+B) \leq N(A) + N(B)$

N définit une norme dans l'ensemble des matrices carrées de taille p. Cette norme est dite **subordonnée** à la norme $|| - ||$ de F.

4. **Norme d'algèbre**
   Soient A, B deux matrices quelconques de E. Pour tout X de F :
   $||(AB)X|| = ||A(BX)|| \leq N(A) \times ||BX|| \leq N(A) \times N(B) \times ||X||$
   Donc $\forall X \in \mathcal{B}_f, \; ||(AB)X|| \leq N(A)N(B)$

$$\boxed{\forall (A, B) \in \mathcal{M}_p(K)^2, \; \sup_{||X|| \leq 1} ||AB)X|| = N(AB) \leq N(A)N(B)}$$

   Ce résultat, joint au fait que $N(I_p) = 1$ définit une norme d'algèbre.

5. **Quelques suites remarquables**
   Soit $A \in E$. On a : $N(A^0) = N(I_p) = 1 = N(A)^0$.
   $N(A^2) \leq N(A) \times N(A) = N(A)^2$.
   $N(A^3) = N(AA^2) \leq N(A)N(A^2) \leq N(A)N(A)^2 = N(A)^3$.
   On montre facilement par récurrence que

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_p(K), \forall n \in \mathbb{N}, \; N(A^n) \leq N(A)^n}$$

   - Série $\sum A^n$ avec $N(A) < 1$
     Soit $A \in E$ telle que $N(A) < 1$. Pour tout n, $N(A^n) \leq N(A)^n$.
     La série $\sum A^n$ est donc normalement convergente. Elle est convergente car E est un espace de dimension finie. Notons L sa somme.
     $L = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} A^n = \lim\limits_{r \to +\infty} \left(I_p + A + A^2 + ... + A^r\right)$.
     On note, pour $r \in \mathbb{N}$, $S_r = \sum\limits_{n=0}^{r} A^n$.
     $S_r(I_p - A) = \sum\limits_{n=0}^{r} A^n - \sum\limits_{n=0}^{r} A^{n+1} = I_p - A^{r+1}$.
     Mais $0 \leq N(A^r) \leq N(A)^r$ avec $N(A) < 1$ donc $\lim\limits_{r \to +\infty} N(A^r) = 0$ et $\lim\limits_{r \to +\infty} A^r = (0)$. On a : $\lim\limits_{r \to +\infty} S_r(I_p - A) = I_p$.

Comme l'application $Y \mapsto Y(I_p - A)$ est continue (car linéaire dans un espace de dimension finie), on a également :
$\lim\limits_{r \to +\infty} S_r(I_p - A) = L(I_p - A)$. Par unicité de la limite : $L(I_p - A) = I_p$.
Mais alors $\det(L)\det(I_p - A) = \det(I_p) = 1$. $I_p - A$ et L sont inversibles et $L = (I_p - A)^{-1}$.

> Pour toute matrice $A \in_p (K)$ telle que $N(A) < 1$, la matrice $I_p - A$ est inversible et
> $$\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = (I_p - A)^{-1}$$

- Exponentielle de matrice

Soit A une matrice quelconque de E. La série de terme général $\dfrac{A^n}{n!}$ est normalement convergente car $N\left(\dfrac{A^n}{n!}\right) = \dfrac{1}{n!}N(A^n) \leq \dfrac{N(A)^n}{n!}$.
Cette série est donc convergente. Sa somme, élément de E donc matrice de $\mathcal{M}_p(K)$ est appelée exponentielle de A et notée $\exp(A) = e^A$.

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_p(K), \quad \exp(A) = e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}}$$

Exemples :

i. $\exp((0)) = I_p$.

$$\text{Si } D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & d_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & d_n \end{pmatrix}, \exp(D) = \begin{pmatrix} e^{d1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & e^{d_2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & e^{d_{n-1}} & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & e^{dn} \end{pmatrix}$$

ii. Si A et B commutent ($AB = BA$), $\exp(A + B) = \exp(A) \times \exp(B)$

iii. $\forall A \in \mathcal{M}_p(K)$, $\exp(A) \times \exp(-A) = \exp((0)) = I_p$

6. **Calcul explicite de $N(A)$ dans un cas particulier**

Choisissons dans F la norme 1 associée à la base canonique.

Si les coordonnées de X sont $x_1, ..., x_p$, $||X|| = \sum_{j=1}^{p} |x_j|$.

Soit $A \in E$ et $X \in \mathcal{B}_f$. Les coordonnées de AX, $y_1, ..., y_p$ sont définies par :
$\forall i \in \{1, ..., p\}$, $y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j$. On a donc :

$$||AX|| = \sum_{i=1}^{p} |y_i| \leq \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{p} |a_{i,j}| \times |x_j| \right) = S$$

En regroupant les termes de S suivant les $|x_j|$ on obtient :

$$||AX|| \leq |x_1[\left(\sum_{i=1}^{p}|a_{i,1}|\right) + ... + |x_p[\left(\sum_{i=1}^{p}|a_{i,p}|\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(|x_j|\left(\sum_{i=1}^{p}|a_{i,j}|\right)\right)$$

Pour toute colonne j de A notons K_j la somme des modules (resp. valeurs absolues) des termes de cette colonne. $K_j = \sum_{i=1}^{p}|a_{i,j}|$. et $M_A = \max_{j=1..p} K_j$.

D'après ce qui précède :

$\forall X \in F$, $||AX|| \leq S \leq M_A \sum_{j=1}^{p}|x_j| = M_A||X||$.

En particulier, pour tout X de $\mathcal{B}_f$, $||AX|| \leq M_a$.

Et donc : $N(A) = \max_{||X||\leq 1}||AX|| \leq M_A$.

Mais considérons E_j, un des vecteurs de la base canonique de F. $||E_j|| = 1$. $E_j \in \mathcal{B}_f$. Par définition $||AE_j|| \leq N(A)$.

Mais $||AE_j|| = \sum_{i=1}^{p}|a_{i,j}| = K_j \leq N(A)$ et $\max_j K_j = M_A \leq N(A)$.

Par double inégalité $N(A) = M_A$.

La norme subordonnée à la norme 1 de $\mathcal{M}_{p,1}(K)$ est définie par :

$$N(A) = \max_{j=1..p}\left(\sum_{i=1}^{p}|a_{i,j}|\right)$$

Normes subordonnées

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés non nuls, avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

- On note $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E,F)$ l'ensemble formé des applications linéaires continues de E vers F.
- $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E)$ l'ensemble formé des endomorphismes continus de E
- n et p désignent des entiers $\geqslant 2$

Une algèbre $(\mathbb{A},+,\times,\cdot)$ est dite normée s'il existe une norme N sur l'espace vectoriel $(\mathbb{A},+,\cdot)$ qui vérifie en outre deux propriétés :

$$\forall (u,v)\in \mathbb{A}^2,\ N(u\times v)\leqslant N(u)\times N(v)$$

On dit alors que N est une norme d'algèbre.

Partie I: Normes subordonnées

Soit $u\in \mathcal{L}_C(E,F)$, on pose $|||\, u\, ||| = \sup\left\{\dfrac{\|\, u\,(x)\,\|_F}{\|\, x\,\|_E},\ x\in E\setminus\{0_E\}\right\}$

1. Montrer que $|||\, u\, |||$ est bien définie
2. Montrer que $|||\, .\, |||$ est une norme sur $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E,F)$, appelée la norme subordonnée.
3. Montrer que
   (a) $|||\, u\, ||| = \sup\limits_{\|\, x\,\|_E\leqslant 1}\|\, u\,(x)\,\|_F = \sup\limits_{\|\, x\,\|_E=1}\|\, u\,(x)\,\|_F$;
   (b) $\forall x\in E,\ \|\, u\,(x)\,\|_F\leqslant |||\, u\, |||\times\|\, x\,\|_E$;
   (c) $|||\, u\, ||| = \min\left\{k\in\mathbb{R}^+ \text{ tel que } \forall x\in E,\ \|\, u\,(x)\,\|_F\leqslant k\,\|\, x\,\|_E\right\}$.
4. (a) Montrer que $(\mathcal{L}_C(E), |||\, .\, |||)$ est une algèbre normée;
   (b) Calculer $|||\, \mathrm{Id_E}\, |||$.

Partie II: Exemples de calcul

5. On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|P\| = \max\limits_{t\in[0,1]}|P(t)|$. Soit $u : \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ P & \longmapsto & P(0)\end{array}\right.$ Montrer que u est continue et calculer $|||\, u\, |||$.
6. Soient $E=C\,([0,1],\mathbb{R})$ et $\varphi\in E$ non nulle . On munit E de la norme usuelle $\|.\|_2$. Soit $T_\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t\end{array}\right.$.

   Montrer que T_φ est continue et calculer $|||\, T_\varphi\, |||$.
7. Soient $E=C^0\,([0,1],\mathbb{R})$ et $F=C^1\,([0,1],\mathbb{R})$. On définit N_1 et N_2 par

$$N_1(f)=\|f\|_\infty \text{ et } N_2(f)=\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty$$

   (a) On définit $T:E\to F$ par : pour toute $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue
   $T(f):[0,1]\to\mathbb{R}$, $T(f)(x)=\displaystyle\int_0^x f\,(t)\ \mathrm{d}t$.
   Montrer que T est une application linéaire continue de (E,N_1) dans (F,N_2)
   (b) Calculer $|||\, T\, |||$

Partie III: Normes matricielles

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Pour $X \in \mathrm{M_{m,1}}(\mathbb{K})$ avec $m \in \{n, p\}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$, on pose

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |x_i|, \quad \|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2} \quad \text{et} \quad \| X \|_\infty = \max_{i \in [\![1,m]\!]} |x_i|$$

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle norme de A subordonnée aux normes sur $\mathrm{M_{p,1}}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{M_{n,1}}(\mathbb{K})$ la norme subordonnée de l'application linéaire u de $\mathrm{M_{p,1}}(\mathbb{K})$ vers $\mathrm{M_{n,1}}(\mathbb{K})$ définie par $u(X) = AX$. On la note $|\!|\!| A |\!|\!|$.

8. On munit $\mathrm{M_{p,1}}(\mathbb{C})$ et $\mathrm{M_{n,1}}(\mathbb{C})$ des normes infinies $\| \,.\, \|_\infty$

   (a) Montrer que $\|AX\|_\infty \leqslant \left(\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{p} |a_{ij}| \right) \|X\|_\infty$ puis que $|\!|\!| A |\!|\!|_\infty \leqslant \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{p} |a_{ij}|$.

   (b) Soit $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{p} |a_{ij}| = \sum\limits_{j=1}^{p} |a_{kj}|$.

   Posons $\forall j \in [\![1, p]\!], a_{kj} = |a_{kj}| e^{i\theta_j}$ et soit $X_0 = \begin{pmatrix} e^{-i\theta_1} \\ \vdots \\ e^{-i\theta_p} \end{pmatrix}$.

   Calculer $\|X_0\|_\infty$ et montrer que $\| AX_0 \|_\infty \geqslant \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{p} |a_{ij}|$

   (c) En déduire que $|\!|\!| A |\!|\!|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{p} |a_{ij}|$.

9. On munit $\mathrm{M_{p,1}}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{M_{n,1}}(\mathbb{K})$ des normes $\|.\|_1$

   (a) Montrer que $\|AX\|_1 \leqslant \left(\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant p} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) \|X\|_1$ et déduire $|\!|\!| A |\!|\!|_1 \leqslant \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant p} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

   (b) Soit $k \in [\![1, p]\!]$ tel que $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant p} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ik}|$, on pose $X_0 = (\delta_{ik})_{i \in [\![1,p]\!]}$.

   Calculer $\|X_0\|_1$ et montrer que $\|AX_0\|_1 = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant p} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

   (c) En déduire $|\!|\!| A |\!|\!|_1 = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant p} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

10. Pour $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$, on pose

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} |a_{ij}|^2}$$

   Montrer que $|\!|\!| A |\!|\!|_2 \leqslant \|A\|_2$. A-t-on l'égalité des normes $|\!|\!| \,.\, |\!|\!|_2$ et $\| \,.\, \|_2$

Corrigé

Partie I: Normes subordonnées

Soit $u \in \mathcal{L}_C(E,F)$

1. u est une application linéaire continue, donc il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que:
$$\forall x \in E, \quad \| u(x) \|_F \leqslant k \| x \|_E$$
En particulier: $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $\quad \dfrac{\| u(x) \|_F}{\| x \|_E} \leqslant k$. Ceci montre que l'ensemble $\left\{ \frac{\| u(x) \|_F}{\| x \|_E},\ x \in E \setminus \{0_E\} \right\}$ est majoré de $\mathbb{R}$ et puisqu'il est non vide , d'après l'axiome de la borne supérieure, il admet une borne supérieure. D'où l'existence de $|\!|\!| u |\!|\!|$.

2. Pour $f \in \mathcal{L}_C(E,F)$, f est bornée sur $\mathcal{B}_f(0,1)$ donc l'application $\forall f \in \mathcal{L}_C(E,F)$, $|\!|\!| f |\!|\!| \in \mathbb{R}^+$. Soient $f, g \in \mathcal{L}_C(E,F)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$:
   - **Séparation:** Si $|\!|\!| f |\!|\!| = 0$ alors $\forall x \in E \setminus \{0\}, f(x) = 0$. Or f est linéaire, donc en particulier $f(0) = 0$. On déduit que $f = 0$.
   - **Homogènéité:** $|\!|\!| \alpha f |\!|\!| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|\alpha f(x)\|_F}{\| x \|_E} = |\alpha| \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|f(x)\|_F}{\| x \|_E} = |\alpha|\ |\!|\!| f |\!|\!|$.
   - **Inégalité triangulaire:** Soit $x \in E \setminus \{0\}$, on a:
   $$\frac{\| (f+g)(x) \|_F}{\| x \|_E} = \frac{\| f(x) + g(x) \|_F}{\| x \|_E} \leqslant \frac{\| f(x) \|_F}{\| x \|_E} + \frac{\| g(x) \|_F}{\| x \|_E} \leqslant |\!|\!| f |\!|\!| + |\!|\!| g |\!|\!|$$
   Donc $\dfrac{\| (f+g)(x) \|_F}{\| x \|_E} \leqslant |\!|\!| f |\!|\!| + |\!|\!| g |\!|\!|$, ceci vrai pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, alors par passage à la borne supérieure, on aboutit à
   $$|\!|\!| f + g |\!|\!| \leqslant |\!|\!| f |\!|\!| + |\!|\!| g |\!|\!|$$

   On déduit que $|||.|||$ est une norme sur $\mathcal{L}_C(E,F)$.

3. (a)
   - Montrons que $|\!|\!| u |\!|\!| \leqslant \sup\limits_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F$:
   Soit $x \in E \setminus \{0\}$, alors $\dfrac{x}{\| x \|_E}$ est de norme 1, donc $\left\| u\left(\dfrac{1}{\|x\|_E} x \right) \right\|_F \leqslant \sup\limits_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F$. Or u est linéaire donc $\dfrac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \leqslant \sup\limits_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F$, puis $|\!|\!| u |\!|\!| \leqslant \sup_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F$
   - Puisque la sphère $S(0,1)$ est incluse dans $\mathcal{B}_f(0,1)$ la boule unité fermée, alors
   $$\sup_{\| x \|_E = 1} \| u(x) \|_F \leqslant \sup_{\| x \|_E \leqslant 1} \| u(x) \|_F$$
   - Montrons que $\sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|u(x)\| \leqslant |\!|\!| u |\!|\!|$:
   Soit $x \in E$ tel que $\|x\|_E \leqslant 1$
     - Si $x = 0$, alors $\| u(x) \|_F = 0 \leqslant |\!|\!| u |\!|\!|$;
     - Si $x \neq 0$, alors $\dfrac{\| u(x) \|_F}{\| x \|_E} \leqslant |\!|\!| u |\!|\!|$ d'où $\|u(x)\|_F \leqslant |\!|\!| u |\!|\!| \| x \|_E \leqslant |\!|\!| u |\!|\!|$ car $\| x \|_E \leqslant 1$. Ainsi $\sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|u(x)\| \leqslant |\!|\!| u |\!|\!|$

   (b) Soit $x \in E$, alors si $x = 0$ c'est fini, sinon $\dfrac{\| u(x) \|_F}{\| x \|_E} \leqslant |\!|\!| u |\!|\!|$, donc l'inégalité
   $$\| u(x) \|_F \leqslant |\!|\!| u |\!|\!| \times \| x \|_E$$

   (c)
   - Montrons que $\inf\{k \in \mathbb{R} / \forall x \in E, \|u(x)\|_F \leqslant k \|x\|_E\} \leqslant |\!|\!| u |\!|\!|$:
   Soit $x \in E \setminus \{0\}$ alors $\left\| \frac{1}{\|x\|_E} x \right\|_E = 1$ donc $\left\| u\left(\frac{1}{\|x\|_E} x \right) \right\|_F \leqslant |\!|\!| u |\!|\!|$. Or u est linéaire donc $\frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \leqslant |\!|\!| u |\!|\!|$ d'où $\|u(x)\|_F \leqslant |\!|\!| u |\!|\!|\ \|x\|_E$.
   On déduit que $\forall x \in E, \|u(x)\|_F \leqslant |\!|\!| u |\!|\!|\ \|x\|_E$ donc $|\!|\!| u |\!|\!| \in \{k \in \mathbb{R} / \forall x \in E, \|u(x)\|_F \leqslant k \|x\|_E\}$ d'où $\inf\{k \in \mathbb{R} / \forall x \in E, \|u(x)\|_F \leqslant k \|x\|_E\} \leqslant |\!|\!| u |\!|\!|$.

- Inversement soit $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in E, \|u(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E$, alors pour x de norme 1, il vient que $\|u(x)\|_F \leqslant k$, et donc $|||\, u\, ||| = \sup_{\|\, x\,\|_E=1} \|\, u\,(x)\,\|_F \leqslant k$. Ainsi

$$|||\, u\, ||| = \inf\{k \in \mathbb{R}/\forall x \in E, \|u(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E\}$$

4. (a) Soit $u, v \in \mathcal{L}_C(E)$, alors pour tout $x \in E$, on a:

$$\|\, u \circ v(x)\,\|_E = \|\, u\,(v(x))\,\|_E \leqslant |||\, u\, |||\, \|\, v(x)\,\|_E \leqslant |||\, u\, |||\,.\, |||\, v\, |||\,.\, \|\, x\,\|_E$$

Donc $|||\, u \circ v\, ||| \leqslant |||\, u\, |||\,.\, |||\, v\, |||$ et par suite $|||\,.\,|||$ est une norme d'algèbre

(b) Par définition $|||\, \mathrm{Id_E}\, ||| = \sup_{\|\, x\,\|_E} \|\, x\,\|_E = 1$

Partie II: Exemples de calcul

5. - u est une forme linéaire. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, on a:

$$|u\,(P)| = |P\,(0)| \leqslant \|P\|$$

Donc u est lipschitzienne en 0, ce qui montre que u est continue sur $\mathbb{R}[X]$ pour la norme considérée

- D'une part $|||\, u\, ||| \leqslant 1$. D'autre part, pour $P = 1$, on a $\dfrac{|u(P)|}{\|P\|} = 1 \geqslant |||\, u\, |||$.

Donc $|||\, u\, ||| = 1$

6. T_φ est bien définie et clairement linéaire. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|T_\varphi(f)| \leqslant \|\varphi\|_2.\|f\|_2$$

donc T_φ est continue et $|||\, T_\varphi\, ||| \leqslant \|\varphi\|_2$.
Pour $f = \varphi$, on a: $|T_\varphi(\varphi)| = \|\varphi\|_2^2$, donc $|||\, T_\varphi\, ||| \geqslant \|\varphi\|_2$, puis $|||\, T_\varphi\, ||| = \|\varphi\|_2$

7. Soient $E = C^0\,([0,1], \mathbb{R})$ et $F = C^1\,([0,1], \mathbb{R})$. On définit N_1 et N_2 par $N_1(f) = \|f\|_\infty$ et $N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$

(a) L'application T est bien définie et est clairement linéaire. Pour tout $x \in [0,1]\,,\quad |T(f)(x)| \leqslant xN_1(f)$ donc $\|T(f)\|_\infty \leqslant N_1(f)$, puis

$$N_2(T(f)) = \|T(f)\|_\infty + \|T(f)'\|_\infty = \|T(f)\|_\infty + \|f\|_\infty \leqslant 2N_1(f)$$

Ainsi T est continue

(b) D'après la question précédente $|||\, T\, ||| \leqslant 2$. Or

$$N_2(T(\exp)) = 2N_1(\exp)$$

Donc $|||\, T\, ||| \geqslant 2$, puis $|||\, T\, ||| = 2$

Partie III: Normes matricielles

8. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$:

(a) On a

$$\|AX\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}||x_j| \leqslant \left(\max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|\right) \|X\|_\infty$$

donc $|||A|||_\infty \leqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|$.

Normes subordonnées

(b) On a $\|X_0\|_\infty = 1$ donc

$$|||A|||_\infty \geqslant \|AX_0\|_\infty \geqslant \left|\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|e^{i\theta_j}e^{-i\theta_j}\right| = \sum_{j=1}^{n}|a_{kj}| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

(c) donc $|||A|||_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$.

9. (a) On a

$$\begin{aligned}
\|AX\|_1 &= \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||x_j| \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}||x_j| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n}\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right)|x_j| \\
&= \left(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right)\|X\|_\infty
\end{aligned}$$

donc $|||A|||_1 \leqslant \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|$.

(b) On a $\|X_0\|_1 = 1$ et $\|AX_0\| = \sum\limits_{i=1}^{n}\left|\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| = \sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ik}| = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|$

(c) $|||A|||_1 = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|$.

10. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. On a

$$\begin{aligned}
\|AX\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j\right|^2 \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p}|a_{ij}||x_j|\right)^2 \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}|a_{ij}|^2\sum_{k=1}^{p}|x_k|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}|a_{ij}|^2\|X\|_2^2 \\
&= \|A\|_2^2\|X\|_2^2
\end{aligned}$$

On déduit que $\|AX\|_2 \leqslant \|A\|_2\|X\|_2$ d'où $|||A|||_2 \leqslant \|A\|_2$.
Remarquons que pour $n = p$, on a $|||\, I_n \,||| = 1$ et $\|\, I_n \,\|_2 = \sqrt{n}$