Préparation aux Concours

Probabilités

I Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle

À toute variable aléatoire réelle discrète $X : \Omega \to \mathbb{R}$, on associe une fonction ϕ_X, appelée *fonction caractéristique* de X et définie par $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right).$

I.A – Premières propriétés

Dans cette sous-partie, X est une variable aléatoire réelle discrète.

Q 1. On suppose, dans cette question, que $X(\Omega)$ est un ensemble fini de cardinal $r \in \mathbb{N}^*$.

On note $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_r\}$ où les x_i sont deux à deux distincts, et, pour tout entier $k \in [\![1, r]\!]$, $a_k = \mathbb{P}(X = x_k)$.

Montrer que, pour tout réel t, $\phi_X(t) = \sum_{k=1}^{r} a_k e^{itx_k}$.

Q 2. On suppose dans cette question que $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable. On note $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ où les x_n sont deux à deux distincts. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \mathbb{P}(X = x_n)$.

Montrer que ϕ_X est définie sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel t, $\phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{itx_n}$.

Q 3. Montrer que ϕ_X est continue sur $\mathbb{R}$.

Q 4. Soit a et b deux réels et $Y = aX + b$. Pour tout réel t, exprimer $\phi_Y(t)$ en fonction de ϕ_X, t, a et b.

Q 5. Soit $t \in \mathbb{R}$. Donner une expression de $\phi_X(-t)$ en fonction de $\phi_X(t)$. En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur l'image $\phi_X(\mathbb{R})$ pour que la fonction ϕ_X soit paire.

I.B – Trois exemples

Q 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. On suppose que $X : \Omega \to \mathbb{R}$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et on note $q = 1 - p$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) = (q + pe^{it})^n$.

Q 7. Soit $p \in]0, 1[$. Quelle est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p ?

Q 8. Soit $\lambda > 0$. Quelle est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ ?

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.

IV.A –

On suppose que $X(\Omega)$ est fini et on reprend les notations de la question 1.

Q 38. Montrer que ϕ_X est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel t, $\phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} \mathbb{E}(X^n)$.

IV.B –

On suppose que $X(\Omega)$ est dénombrable et on reprend les notations de la question 2.

On suppose également que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, X admet un moment d'ordre n et qu'il existe un réel $R > 0$ tel que

$$\mathbb{E}(|X|^n) = O\left(\frac{n^n}{R^n}\right) \qquad \text{quand } n \to +\infty.$$

Q 39. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, $\left| e^{iy} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(iy)^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|y|^{n+1}}{(n+1)!}$.

Q 40. En déduire que pour tout réel $t \in \left[-\frac{R}{e}, \frac{R}{e}\right]$,

$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}(X^k).$$

Thème 2 : Fonction Génératrice des moments

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

Si $p \in \mathbb{N}$, on dit que X admet un moment d'ordre p si la variable aléatoire X^p admet une espérance. On note alors $m_p(X)$, appelé *moment d'ordre p de X*, l'espérance de X^p.

On remarque que $m_0(X) = 1$.

Q 1. Justifier que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $0 \leqslant X^k \leqslant 1 + X^n$.

Q 2. En déduire que, si X admet un moment d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$), alors X admet des moments d'ordre k pour tous $k \in [\![1, n-1]\!]$.

I.A – Fonction génératrice des moments

On suppose que, pour tout entier naturel non nul n, X admet un moment d'ordre n et que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} m_n(X)\dfrac{t^n}{n!}$ admet un rayon de convergence $R_X > 0$.

Pour tout $t \in \left]-R_X, R_X\right[$, on note $M_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} m_n(X)\dfrac{t^n}{n!}$. La fonction M_X s'appelle la *fonction génératrice* des moments de la variable aléatoire X.

Q 3. Justifier que la connaissance de la fonction M_X permet de déterminer de manière unique la suite $\big(m_n(X)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q 4. En utilisant les résultats du préambule, montrer que, pour tout $t \in \left]-R_X, R_X\right[$, la variable aléatoire e^{tX} admet une espérance et que $M_X(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX})$.

Q 5. Montrer réciproquement que, s'il existe un réel $R > 0$ tel que, pour tout $t \in \left]-R, R\right[$, la variable aléatoire e^{tX} admet une espérance, alors l'ensemble de définition de la fonction génératrice des moments de X contient $\left]-R, R\right[$ et pour tout $t \in \left]-R, R\right[$, $M_X(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX})$.

On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes à valeurs strictement positives admettant des moments de tous ordres. On note R_X (respectivement R_Y) le rayon de convergence (supposé strictement positif) associé à la fonction M_X (respectivement M_Y).

Q 6. Montrer que la variable aléatoire $X + Y$ admet des moments de tous ordres et que

$$\forall |t| < \min(R_X, R_Y), \quad M_{X+Y}(t) = M_X(t) \times M_Y(t)$$

I.B – Exemples

λ est un nombre réel fixé.

I.B.1) On suppose que Z est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant la loi de Poisson de paramètre λ.

Q 7. Montrer que Z admet des moments de tous ordres.

Q 8. Calculer la fonction génératrice des moments de Z. En déduire les valeurs de $m_1(Z)$ et $m_2(Z)$.

I.B.2) Soit n un entier naturel non nul. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, X_i est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant une loi de Bernoulli de paramètre λ/n. On suppose que $X_1, X_2, ..., X_n$ sont mutuellement indépendantes et on pose $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

Q 9. Calculer la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire S_n.

Q 10. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} M_{S_n}(t)$.

Q 11. Comparer avec les résultats de la question 8.

I.B.3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, U_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On pose $Y_n = \dfrac{1}{n}U_n$.

Q 12. Calculer la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire Y_n.

Q 13. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} M_{Y_n}(t)$.

Thème 3 : Fonction Génératrice

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, on appelle fonction génératrice d'une variable aléatoire réelle X à valeurs dans $\mathbb{N}$, lorsqu'elle existe, la fonction G_X définie par: $G_X(t) = E(t^X) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} t^k P(X = k)$.

Partie I

Quelques propriétés de la fonction génératrice et quelques exemples

1. Montrer que la fonction génératrice G_X est au moins définie sur l'intervalle [-1,1].
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $G_X^{(k)}(0) = k!P(X = k)$.
3. Donner l'expression de G_X, en précisant le domaine de définition, dans chaque cas suivant:
   a) X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, notée $\mathcal{B}(p)$, où $p \in [0, 1]$.
   b) X suit la loi binomiale de paramètre n, p, notée $\mathcal{B}(n, p)$, où $n \in \mathbb{N}^*, p \in [0, 1]$.
   c) X suit la loi géométrique de paramètre p, notée $G(p)$, où $p \in]0, 1[$.
4. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance si, et seulement si, G_X est dérivable en 1 et dans ce cas $G'_X(1) = E(X)$.
5. Montrer que la variable aléatoire X admet un moment d'ordre 2 si, et seulement si, G_X est deux fois dérivable en 1 et dans ce cas $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$.
6. En déduire l'espérance et la variance d'une variable aléatoire qui suit la loi géométrique $G(p)$ de paramètre p, où $p \in]0, 1[$.

Partie II

La fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires

Soient n un entier naturel non nul et N une variable aléatoire telle que $N(\Omega) = [\![1, n]\!] = \{1, \ldots, n\}$. On suppose que pour tout k de $[\![1, n]\!]$, $P(N = k)$ est non nul. On considère n variables aléatoires indépendantes $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$, toutes de même loi qu'une variable aléatoire X, telle que $X(\Omega) = [\![1, m]\!]$, avec m un entier naturel non nul. On pose $S = \sum\limits_{i=1}^{N} X_i$, (en particulier, sachant que l'événement $(N = h)$ est réalisé, $h \in [\![1, n]\!]$, alors $S = \sum\limits_{i=1}^{h} X_i$).

1. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $G_{X_1 + \ldots + X_k} = G_X^k$.
2. a) Soit Y une variable aléatoire réelle qui prend un nombre fini de valeurs dans $Y(\Omega)$, montrer que $E(Y) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(N = k) E(Y | [N = k])$, où $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $E(Y | [N = k]) = \sum\limits_{y \in Y(\Omega)} y P\left((Y = y) | [N = k]\right)$ désigne l'espérance de Y sachant l'événement $[N = k]$ et $P\left((Y = y) | [N = k]\right)$ désigne la probabilité de $(Y = y)$ sachant l'événement $[N = k]$.
   b) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et pour tout réel t, $E(t^S | [N = k]) = G_X^k(t)$.
   c) En déduire que pour tout réel t, $G_S(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(N = k) G_X^k(t)$.
   d) Montrer que $G_S = G_N \circ G_X$.
3. En déduire que $E(S) = E(N)E(X)$.

Thème 4 : Une autre fonction génératrice

Partie I
Cas particulier : variables aléatoires discrètes finies

Soit X une variable aléatoire discrète prenant un nombre fini de valeurs $x_1, ..., x_r$ avec les probabilités respectives $p_1, ..., p_r$, où $r \in \mathbb{N}^*$. Dans cette partie, on définit la fonction φ_X sur $\mathbb{R}^*$ par,

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \;\; \varphi_X(t) = \frac{1}{t}\ln(M_X(t))$$

1. Déterminer M_Z, lorsque Z suit une loi de Bernoulli de paramètre p, $p \in [0,1]$.

2. Montrer que M_X est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et que pour tout entier naturel k, $M_X^{(k)}(0) = E(X^k)$.

3. (a) Montrer que φ_X est bien définie sur $\mathbb{R}^*$ et prolongeable par continuité en 0. On pose $\varphi_X(0) = E(X)$ et on note encore φ_X la fonction ainsi prolongée.

(b) Démontrer que φ_X est dérivable en 0 et calculer $\varphi_X'(0)$ en fonction de la variance $V(X)$ de X.

(c) i. Montrer que pour tout $u \leq 0$, $e^u \leq 1 + u + \frac{1}{2}u^2$.

ii. Montrer que si X ne prend que des valeurs négatives ou nulles, alors, pour tout $t \geq 0$,

$$\varphi_X(t) \leq E(X) + \frac{t}{2}E(X^2).$$

(d) i. Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq r$, on note f_i la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $t \mapsto e^{tx_i}$. Montrer que la famille $(f_1, ..., f_n)$ est libre.

ii. En déduire que deux variables discrètes finies X et Y ont la même loi si, et seulement si, les fonctions φ_X et φ_Y sont égales.

(e) Montrer que si X et Y sont des variables discrètes finies indépendantes, alors, $\varphi_{X+Y} = \varphi_X + \varphi_Y$.

(f) En déduire M_X, lorsque X suit une loi binomiale de paramètre s et p, s est un entier naturel non nul et $0 \leq p \leq 1$.

(g) On dit qu'une variable aléatoire réelle X est symétrique si X et $-X$ ont la même loi. Montrer que φ_X est impaire si, et seulement si, X est une variable aléatoire réelle symétrique.

4. On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires discrètes finies mutuellement indépendantes sur (Ω, A, P), qui suivent la même loi que X. On note m l'espérance de X et σ son écart-type que l'on suppose strictement positif.

On pose, pour tout entier naturel non nul, $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ et $S_n^* = \dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}$.

(a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n et tout réel non nul t,

$$\varphi_{S_n^*}(t) = \frac{-m\sqrt{n}}{\sigma} + \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varphi_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

(b) En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{S_n^*}(t) = \dfrac{t}{2}$.

Partie II
Cas des variables aléatoires discrètes réelles infinies

Soit X une variable aléatoire discrète réelle infinie, notons I_X l'ensemble des réels t pour lesquels M_X existe.

1. (a) Montrer que, pour tous réels a, b, c tels que $a < b < c$ et tout réel x, $e^{bx} \leq e^{ax} + e^{cx}$.

(b) En déduire que I_X est un intervalle contenant 0.

2. Soit Y une variable aléatoire discrète réelle qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Déterminer la fonction génératrice des moments M_Y de Y.

3. On suppose que la fonction M_X est définie sur un intervalle de la forme $]-a, a[$, $(a > 0)$. Notons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération des valeurs de X.
Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in]-a, a[$, $u_n(t) = P(X = x_n)e^{tx_n}$. Soit $\alpha > 0$ tel que $[-\alpha, \alpha] \subset]-a, a[$, et soit $\rho \in]\alpha, a[$.

(a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout $t \in]-\alpha, \alpha[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n^{(k)}(t)| \leq P(X = x_n)(|x_n|)^k e^{\rho|x_n|}$, où $u_n^{(k)}$ désigne la dérivée k-ème de la fonction u_n.

(b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $M_k > 0$, pour tout $t \in]-\alpha, \alpha[$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n^{(k)}(t)| \leq M_k P(X = x_n)e^{\rho|x_n|}.$$

(c) En déduire que M_X est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-a, a[$, et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $E(X^k) = M_X^{(k)}(0)$.

4. En déduire l'espérance et la variance d'une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Thème 5 : Une démonstration probabiliste du théorème de Stone-Weierstrass

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit S_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et x, $x \in [0, 1]$, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \dfrac{S_n}{n}$.

(a) Déterminer $E(X_n)$ et $V(X_n)$ respectivement l'espérance et la variance de X_n.

(b) Justifier que, pour tout $\delta > 0$, $P(|X_n - x| \geq \delta) \leq \dfrac{1}{4n\delta^2}$.

2. On introduit la variable aléatoire $Y_n = f(X_n)$ et on pose pour tout $x \in [0, 1]$, $C_n(f)(x) = E(Y_n)$. Pour la suite de cette question, on se donne un réel $\varepsilon > 0$.

(a) Vérifier que $x \mapsto C_n(f)(x)$ est une fonction polynomiale définie sur $[0, 1]$.

(b) D'après le théorème de Heine, comme f est continue sur $[0, 1]$, alors il existe $\beta > 0$ tel que, pour tout $(x_1, x_2) \in [0, 1] \times [0, 1]$, $|x_1 - x_2| \leq \beta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. (On ne vous demande pas de redémontrer ce résultat).

i. Montrer que $\left| \displaystyle\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leq\beta} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) P\left(X_n = \frac{k}{n}\right) \right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$

ii. Montrer que $\left| \displaystyle\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\beta} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) P\left(X_n = \frac{k}{n}\right) \right| \leq \dfrac{M}{2n\beta^2}$, avec $M = \displaystyle\sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

(c) En déduire que la suite $(C_n(f))_{n\geq1}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.