

MATHS PrEPaS

My Ismail Mamouni

<http://myismail.net>

مَمُونِي مُوَلَّايِ اسْمَاعِيل

EVN

L'Essentiel du Cours
Les Astuces

Normes Usuelles

Dans $\mathbb{R}^n$: $\|x\|_2 = \left(\sum x_k^2\right)^{1/2}$, $\|x\|_1 = \sum |x_k|$, $\|x\|_\infty = \max |x_k|$

Astuce (MP)

Comment montrer en dimension infinie que deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes :

Il faut trouver $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tq $\alpha \cdot N_1 \leq N_2 \leq \beta \cdot N_1$

Autrement dit $\alpha \leq N_2 / N_1 \leq \beta$, cad N_2 / N_1 est bornée

Remarque :

La relation deux normes sont équivalentes est une relation d'équivalence
En particulier N_1 et N_2 sont équivalentes $\Leftrightarrow N_2$ et N_1 sont équivalentes

Astuce (MP)

Comment montrer en dimension infinie que deux normes N_1 et N_2 ne sont équivalentes :

Il faut une suite (x_n) tq $N_2(x_n) / N_1(x_n) \rightarrow 0$ ou $+\infty$

Exemple

Dans $E = \{f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}\}$, les normes $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$ et $\|f\|_\infty = \sup |f|$ ne sont pas équivalents et donc $\dim E = \infty$

Pour $f_n(t) = t^n$, $\|f_n\|_1 = 1/(n+1)$ et $\|f_n\|_\infty = 1$, donc $\|f_n\|_1 / \|f_n\|_\infty \rightarrow 0$

Théorème

En dimension finie toutes les normes sont équivalentes

Remarque Utile

N_1 et N_2 sont équivalentes $\Leftrightarrow \text{id}_E : (E, N_1) \rightarrow (E, N_2)$ est bi-lipschitzienne

Demo

Posons $N_2(x) = \|x\|_2$ et $N_1(x) = \|x\|_1$

$\|\text{id}(x) - \text{id}(y)\|_2 = N_2(\text{id}(x) - \text{id}(y)) = N_2(x - y) \leq \beta \cdot N_1(x - y) = \beta \cdot \|x - y\|_1$

Autrement dit

$\|\text{id}(x) - \text{id}(y)\|_2 \leq \beta \cdot \|x - y\|_1$

Or $N_1 \leq 1/\alpha N_2$, donc $\|\text{id}(x) - \text{id}(y)\|_1 \leq 1/\alpha \cdot \|x - y\|_1$

Théorème (Pratique)

Toutes les normes sont 1-lipschitzienne donc continues

En particulier $\lim \| \cdot \| = \| \lim \|$

Demo

$$| \|x\| - \|y\| | \leq \|x - y\|$$

Théorème (Pratique)

Toutes les distance sont 1-lipschitzienne donc continues

En particulier $\lim d(,) = d(\lim ,) = d(, \lim)$

Définition

(x_n) de Cauchy $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ tq $n \geq N$ et $m \geq N \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon$

Théorème : A retenir

- (x_n) converge $\Rightarrow (x_n)$ de Cauchy $\Rightarrow (x_n)$ bornée
- Compact $\Rightarrow$ Complet $\Rightarrow$ Fermé
- Réciproques ne sont pas toujours vrai

Astuce

si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue, alors les ensembles suivants sont toujours ouverts

- $\{x \in A \text{ tq } f(x) > \alpha\}$ (car $\{x \in A \text{ tq } f(x) > \alpha\} = f^{-1}] \alpha, +\infty[)$
- $\{x \in A \text{ tq } f(x) < \alpha\}$ (car $\{x \in A \text{ tq } f(x) < \alpha\} = f^{-1}] -\infty, \alpha [)$
- $\{x \in A \text{ tq } f(x) \neq \alpha\}$ (car $\{x \in A \text{ tq } f(x) < \alpha\} = f^{-1}] -\infty, \alpha [\cup] \alpha, +\infty[)$

Astuce

$x_n \in A \Rightarrow \lim x_n \in \text{ad}(A)$

$x_n \in A$ et A fermé $\Rightarrow \lim x_n \in A$

Théorème

Tout singleton $\{a\}$ est fermé

Demo

Car tout suite x_n qui converge et à valeur dans $\{a\}$ est cte, $x_n = a$, donc $\lim x_n = a \in \{a\}$

Astuce

si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue, alors les ensembles suivants sont toujours ouverts

- $\{x \in A \text{ tq } f(x) \geq \alpha\}$ (car $\{x \in A \text{ tq } f(x) \geq \alpha\} = f^{-1}[\alpha, +\infty[)$)
- $\{x \in A \text{ tq } f(x) \leq \alpha\}$ (car $\{x \in A \text{ tq } f(x) \leq \alpha\} = f^{-1}] -\infty, \alpha]$)
- $\{x \in A \text{ tq } f(x) = \alpha\}$ (car $\{x \in A \text{ tq } f(x) = \alpha\} = f^{-1}\{\alpha\}$)

Application

Montrer que l'ensemble des projecteur est un fermé car
 $P_n(\mathbb{R}) = \{u \in L(E) \text{ tq } u^2 - u = 0\}$ est fermé car l'application
 $u \rightarrow u^2$ est continue

Théorème fondamental

k-lipschitzienne $\Rightarrow$ Continuité uniforme $\Rightarrow$ Continuité globale
 Réciproques ne sont pas toujours vrai

Théorème utile

Tout fct continue sur un compact est uniformément continue

Astuce

Pour montrer f n'est pas lipschitzienne sur A

Méthode 1 : Montrer f n'est pas uniformément continue sur A

Méthode 2 : Montrer f n'est pas continue sur A

Méthode 2 : Montrer f' n'est pas bornée

Application

Montrer que $f(x) = x^{1/2}$ est uniformément continue sur $[0,1]$, mais n'est pas lipschitzienne

Réponse

$f(x) = x^{1/2}$ est uniformément continue sur $[0,1]$ car continue sur $[0,1]$ et $[0,1]$ compact

Mais $f'(x) = 1/2 \cdot x^{-1/2} \rightarrow \infty$ quand $x \rightarrow 0$, donc f n'est pas lipschitzienne sur $]0,1]$, donc non plus $[0,1]$

Astuce

Pour montrer f uniformément continue sur A

Méthode 1 : Montrer f lipschitzienne sur A

Méthode 2 : Montrer f continue sur A compact

Astuce

Pour montrer f non uniformément continue, il suffit de trouver deux suites (x_n) et (y_n) tq $x_n - y_n \rightarrow 0$, mais $f(x_n) - f(y_n)$ ne tend pas vers 0

Application

Montrer que $f(x)=1/x$ est continue sur $]0,+\infty[$, mais n'est pas uniformément continue

Réponse

$x_n=1/n$ et $y_n=1/(n+1)$, on a $x_n - y_n \rightarrow 0$, mais $f(x_n) - f(y_n) = -1$ ne tend pas vers 0

Astuce

Pour montrer f non uniformément continue, il suffit de trouver une suite convergente (x_n) tq $f(x_n)$ diverge ou bien $\lim f(x_n) \neq f(\lim x_n)$