MATH PrEPaS

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

مَموُنِي مُولَاِي اسمَاعِيل

EVN

Les Classics

Classique Concours : Norme sous multiplicative
C’est toute norme sur une algèbre A vérifiant la relation

$$||x.y|| \leq ||x||.\ ||y||,\ \forall\ x,y \in E$$

Dans ce cas $||x^n|| \leq ||x||^n$ et $||\prod x_k|| \leq \prod ||x_k||$
On dit que A est une algèbre normé

Must Concours : Norme Schur-Frobenuis
Sur $M_n(IR)$, on pose $||A||=Tr({}^tA.A)^{1/2}$

1. Montrer que c’est une norme
2. Montrer que $||A.B|| \leq ||A||.\ ||B||$
3. Montrer que $O(n)=\{A \in Gl_n(IR) \text{ tq } A^{-1}={}^tA\}$ fermé borné

Solution

1. $Tr({}^tA.A)^{1/2} = \left(\sum a_{ij}^2\right)^{1/2}$ norme usuelle $|| \ ||_2$ sur IR^{n^2}
2. Inégalité de Cauchy Schwarz
3. fermé voir ultérieurement
   Bornée : $A \in O_n(IR) \Rightarrow {}^tA.A = I_n \Rightarrow ||A||=Tr({}^tA.A)^{1/2} = n^{1/2}$

Must Concours
A une partie non vide, $x \in E$ et on pose $d(x,A)=\inf\{d(x,y) \text{ tq } y \in A\}$
On définie $f : E \to IR$ par $f(x)=d(x,A)$

1. Montrer que f est bien définie
2. Montrer que f est 1-lipschitzienne
3. Montrer qu’il existe une suite $(y_n) \in A$ tq $d(x,A)=\lim d(x,y_n)$

Solution

1. f(x) existe car $\{d(x,y) \text{ tq } y \in A\}$ non vide minoré par 0
2. $|d(x_1,y) – d(x_2,y)| =|\ ||x_1 – y|| – ||x_2 - y||\ \leq ||x_1 – x_2||$
   $\Rightarrow d(x_1,y) – d(x_2,y) \leq ||x_1 – x_2|| \Rightarrow d(x_1,y) \leq d(x_2,y) + ||x_1 – x_2||$
   $\Rightarrow d(x_1,A) \leq d(x_1,y) \leq d(x_2,y) + ||x_1 – x_2||$
   Donc $d(x_1,A) - ||x_1 – x_2|| \leq d(x_2,y)\ \forall y \in A$
   Donc $d(x_1,A) - ||x_1 – x_2||$ est un minorant de $\{d(x_2,y) \text{ tq } y \in A\}$
   or $\inf\{d(x,y) \text{ tq } y \in A\}$ est le plus grand des un minorant de $\{d(x_2,y)$ tq $y \in A\}$
   Donc $d(x_1,A) - ||x_1 – x_2|| \leq d(x_2,A)$
   Donc $d(x_1,A) – d(x_2,A) \leq ||x_1 – x_2||$
   Par symétrie on a aussi $d(x_2,A) – d(x_1,A) \leq ||x_2 – x_1|| = ||x_1 – x_2||$
3. Appliquer la propriété caractéristique de la borne inf pour
   $Y=\{d(x,y) \text{ tq } y \in A\}$ avec $\varepsilon = 1/n$
   $L=\inf Y \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists y \in Y \text{ tq } L \leq y < L+ \varepsilon$ (Y dépend de ε)
   $d(x,A) \leq d(x,y_n) < L+ 1/n$

Classique Concours : Normes Matricielle

Soit $A \in M_n(IR)$ et on munit IR^n d'une norme $\| . \|$

On pose $||| A ||| = \sup \{\|AX\| / \|X\| \text{ tq } X \neq 0\}$

1. Montrer que $||| A ||| = \sup \{\|AX\| \text{ tq } \|X\|=1\}$
2. Montrer que $||| A ||| = \sup \{\|AX\| \text{ tq } \|X\| \leq 1\}$
3. Montrer que $\| AX \| \leq ||| A ||| . \| X\|$
4. En déduire $||| A.B ||| \leq ||| A ||| . ||| B |||$
5. Soit $\lambda \in sp(A)$. Montrer que $| \lambda | \leq ||| A \|$
6. En déduire que $\rho(A) \leq ||| A |||$

   où $\rho(A)=\max \{ |\lambda| \text{ tq } \lambda \in sp(A)\}$: Rayon spectral

Classique Concours : Normes subordonnées

Soit $u : E \rightarrow E$ endomorphisme continue et on munit E d'une norme $\| . \|$

On pose $||| u ||| = \sup \{\|u(x)\| / \|x\| \text{ tq } x \neq 0\}$

1. Montrer que $||| u ||| = \sup \{\|u(x)\| \text{ tq } \|x\|=1\}$
2. Montrer que $||| u ||| = \sup \{\|u(x)\| \text{ tq } \|x\| \leq 1\}$
3. Montrer que $\| u(x) \| \leq ||| u ||| . \| x \|$
4. En déduire $||| uov ||| \leq ||| u ||| . ||| v |||$
5. Soit $\lambda \in sp(u)$. Montrer que $| \lambda | \leq ||| u \|$
6. En déduire que $\rho(u) \leq ||| u |||$

   où $\rho(A)=\max \{ |\lambda| \text{ tq } \lambda \in sp(A)\}$: Rayon spectral

Classique

1. Montrer que A fermé, $A \subset B$ et B compact => A compact
2. Montrer que A fermé, $A \subset B$ et B complet => A complet
3. Montrer que A complet, $A \subset B$ et B compact => A compact

Solution

1.

   En dimension fini

   B compact, donc B borné. $A \subset B$, donc A aussi borné

   Comme A est fermée borné en dimension fini, donc A compact

   En dimension qlq

   $\forall (x_n) \in A^{IN}$, on a $x_n \in B$ et B compact, donc $\exists x_{\varphi(n)}$ converge tq a $\lim x_{\varphi(n)} \in B$.

   Or $(x_{\varphi(n)}) \in A^{IN}$ qui converge et A fermé, donc $\lim x_{\varphi(n)} \in A$
2. A faire
3. A faire

Must concours
$Gl_n(IR)$ est un ouvert car $Gl_n(IR) = \{A \in M_n(IR)$ tq $\det(A) \neq 0\}$ et
$A \to \det(A)$ est continue
$S_n^{++}(IR)$ est un ouvert car $S_n^{++}(IR) = \{A \in S_n(IR)$ tq ${}^tX.A.X > 0\}$
et $A \to {}^tX.A.X$

Must concours
$O_n(IR)$ est un fermé car $O(n) = \{A \in Gl_n(IR)$ tq $f(A) = I_n\}$ où $f : A \to {}^tA.A$ est continue
$S_n(IR)$ est un ouvert car $S_n(IR) = \{A \in Gl_n(IR)$ tq ${}^tA - A = 0\}$
$S_n^{+}(IR)$ est un ouvert car $S_n^{+}(IR) = \{A \in S_n(IR)$ tq ${}^tX.A.X \geq 0\}$ est un fermé car l'application $A \to {}^tX.A.X$ est continue

Classique concours
1. En déduire que $\chi_{AB}(X) = \chi_{BA}(X)$ $\forall A \in M_2(IR)$ et $\forall B \in M_2(IR)$
2. Montrer que $Gl_n(IR)$ est dense $M_n(IR)$
3. Montrer que $\chi_{AB}(X) = \chi_{BA}(X)$ si $A \in Gl_n(IR)$ et $B \in M_n(IR)$
4. En déduire que $\chi_{AB}(X) = \chi_{BA}(X)$ $\forall A \in M_n(IR)$ et $\forall B \in M_n(IR)$
   Indication 1 : $A \to \det(A)$
   Indication 2 : $Gl_n(IR)$ est dense $M_n(IR)$

Rappel
$\lambda \notin sp(A) \iff A - \lambda I \in Gl_n(IR)$

Solution
1. Dans $M_2(IR)$: $\chi_A(X) = X^2 - Tr(A)X + \det(A)$
   Donc $\chi_A(X) = X^2 - Tr(AB)X + \det(AB) = X^2 - Tr(BA)X + \det(BA) = \chi_{BA}(X)$

2. **Démonstration à apprendre**

   Montrons que pour tout $A \in M_n(IR)$, $\exists A_k \in Gl_n(IR)$ tq $\lim A_k = A$
   1^er cas : $sp(A) = \{0\}$
   Dans ce cas $\forall k \in IN$, on a $1/k \notin sp(A)$, donc $A_k = A - 1/k.I \in Gl_n(IR)$ avec $\lim A_k = A$
   2^éme cas : $sp(A) \neq \{0\}$
   On pose $\varepsilon = \min\{ |\lambda|$ tq $\lambda \in sp(A)$ et $\lambda \neq 0\}$, on a $\varepsilon \neq 0$
   $\forall k > 1/\varepsilon$ on a $1/k < \varepsilon = \min\{ |\lambda|$ tq $\lambda \in sp(A)$ et $\lambda \neq 0\}$
   donc $1/k \notin sp(A)$, donc $A_k = A - 1/k.I \in Gl_n(IR)$ avec $\lim A_k = A$

3. $\chi_{AB}(X)$ =det(X.I-AB) =det(X.A.A^{-1}-ABA.A^{-1}) (X=scalaire)
   =det (A.[X.I-BA].A^{-1}) = det (X.I-BA) = $\chi_{BA}(X)$
4. $\chi_{AB}(X)$ = det(X.I -A.B) = det(X.I -lim A_k .B) avec $A_k \in Gl_n(IR)$
   = lim det(X.I -A_k .B) (car A → det(A) continue)
   = lim $\chi_{A_kB}(X)$ = lim $\chi_{BA_k}(X)$ (car $A_k \in Gl_n(IR)$)
   = lim det(X.I – BA_k)
   = det(X.I – lim BA_k) (car A → det(A) continue)
   = det(X.I – BA) = $\chi_{BA}(X)$

Classique concours

1. Soit E préhilbertien et F sev de E
   1. Montrer que $F^{\perp}=Adh(F)^{\perp}$
   2. En déduire que F est dense dans E => $F^{\perp}$ =0
2. On munit E={f : [0,1] → IR continue} de $\|\,.\,\|_2$ et de $\|\,.\,\|_\infty$
   1. Montrer que dim IR [X]=∞
   2. En déduire que dim E=∞
   3. Montrer que F=IR[X] est dense dans E pour $\|\,.\,\|_\infty$
   4. En déduire que F=IR[X] est dense dans E pour $\|\,.\,\|_2$
   5. En déduire que $F^{\perp}$ =0
   6. les relations suivantes sont elle vraies
      1. $F^{\perp\perp}=F$
      2. $E=F\oplus F^{\perp}$

Solution

1. On sait F ⊂ Adh(F), donc $Adh(F)^{\perp} \subset F^{\perp}$
   Inversement
   $x \in F^{\perp}$ => $\langle x,y_n\rangle=0$, $\forall\, y_n \in F$ =>lim $\langle x,y_n\rangle=0$, $\forall\, y_n \in F$
   => $\langle x, \lim y_n\rangle=0$, $\forall\, y_n \in F$ => $\langle x, y\rangle=0$, $\forall\, y \in adh(F)$
   => $x \in adh(F)^{\perp}$
   1. F est dense dans E => adh(F)=E =>$adh(F)^{\perp}=E^{\perp}$ => $F^{\perp}$ =0
2. .
   1. Montrer que dim IR [X]=∞
      En effet IR_n [X] ⊂ IR [X], ∀n∈IN, donc
      dimIR_n [X]≤dim IR[X], ∀n∈IN
      donc n+1≤ dim IR[X], ∀n∈IN
      quand n → ∞, on obtient dim IR[X]=∞
   2. car IR [X] ⊂ E et dim IR [X]=∞
   3. Découle du thm de Stone weirstrass qui dit que toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de polynômes

Autrement dit $\forall f \in E, \exists P_n \in F$ tq $P_n \to f$ uniformément
cad $\| P_n - f \|_\infty \to 0$
Autrement dit $f = \lim P_n$ pour la norme $\| . \|_\infty$

4. Il suffit de montrer que la convergence pour la norme $\| . \|_\infty$ implique la convergence pour la norme $\| . \|_2$
   Pour cela il suffit de montrer que $\| . \|_2 \leq K.\| . \|_\infty$
   En effet $\| . \|_2^2 = \int_0^1 |f(t)|^2 \, dt \leq \int_0^1 \| f \|_\infty^2 \, dt \leq \| f \|_\infty^2$
   Donc $\| f \|_2 \leq \| f \|_\infty$
   Comme $\| P_n - f \|_\infty \to 0$, alors $\| P_n - f \|_2 \to 0$
5. Découle de 1.2 et 2.2
6.
   1. $F^{\perp\perp} = \{0_E\}^\perp = E$ = {fct continue} $\neq$ {polynômes}
      l'expo n'est un polynôme car un polynôme ses dérivée sont nuls à PCR
   2. $F \oplus F^\perp = F$ = {polynômes} $\neq$ fct continue} = E

Application
Soit E une algèbre normée tq $\|a.b\| \leq \|a\|. \|b\|$
On fixe $a \in E$
1. Montrer que $\|1_E\| \geq 1$
2. Montrer que l'application $f : x \to a.x$ est linéaire continue
3. En déduire que $\lim (a.x_n) = a. \lim x_n$
4. Donner $||| f |||$ quand $\|1_E\| = 1$

Solution
1. $\|a\| = \|a.1_E\| \leq \|a\|. \|1_E\|$ donc $\|1_E\| \geq 1$
2. linéarité (ok) : découle de la distributivité du produit
   $\|f(x)\| = \|a.x\| \leq \|a\|. \|x\|$, donc f est continue
3. $\lim (a.x_n) = \lim f(x_n) = f(\lim x_n) = a.\lim x_n$
   $\|f(x)\| \leq \|a\|. \|x\| \Rightarrow \|f(x)\| / \|x\| \leq \|a\|, \forall x \in E$
   $\Rightarrow \sup \|f(x)\| / \|x\| \leq \|a\|, \forall x \in E \Rightarrow ||| f ||| \leq \|a\|$
   D'autre part pour $x = 1_E$, on a $\|f(1_A)\| / \|1_E\| = \|a\|$, d'où l'égalité

Classique Concours

Soit E préhilbertien, F sev de E

1. Soit p la projection orthogonale sur F
    1. Montrer que $\| p(x) \| \leq \| x \|, \forall x \in E$
    2. En déduire que p est continue et que $|||\, p \,||| = 1$
2. Soit p une projection sur F continue tq $|||\, p \,||| = 1$.
   Montrer que p est une projection orthogonale
   Autrement dit : montrer que Im p $\perp$ ker p
   ou bien Montrer que $\langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle$
3. Soit p une projection sur F continue tq $|||\, p \,||| \geq 1$.
   Montrer que p est une projection orthogonale

Solution

1. p la projection orthogonale sur F => Im p $\perp$ ker p
   Or $x = p(x) + x - p(x)$ avec $p(x) \in$ Im p et $x - p(x) \in$ ker p
   D'après le théorème de Pythagore
   $\|x\|^2 = \|p(x) + x - p(x)\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2$
   Donc $\| p(x) \|^2 \leq \|x\|^2$, donc $\|p(x)\| \leq \|x\|$, donc $|||\, p \,||| \leq 1$
   Pour $x \in$ I mp on a $\|p(x)\| = \|x\|$, donc $|||\, p \,||| = 1$
2.

Classique Concours

Soit E préhilbertien, S de E

1. Soit $a \in E$ fixé
    1. Montrer que $f : x \to \langle a,x\rangle$ est une forme linéaire continu
    2. Montrer $|||\, f \,||| = \|a\|$
2. Soit $f : x \to \langle a,x\rangle$ est une forme linéaire
    1. Montrer que f est continue
    2. Montrer que $\exists !\, a \in E$ tq $f(x) = \langle a,x\rangle, \forall x \in E$
    3. En déduire autrement que f est continue et que $|||\, f \,||| = \|a\|$

Classique : Demo Topologique Cayley Hamilton

Rappel : Si $A \in M_n(IK)$, alors $\chi_A(A)=0$

Énoncé

1. Montrer que $\chi_A(A)=0$ quand A est diagonale
2. Si $Q\in IK[X]$, P et $D\in M_n(IK)$, montrer que $Q(PDP^{-1})= PQ(D)P^{-1}$
3. En déduire que $\chi_A(A)=0$ quand A est diagonalisable
4. Montrer que $D_n^{++}(IK)$ dense dans $T_n(IK)$
   où $D_n^{++}(IK)$={matrices diagonalisable à valeurs propres simples}
   $T_n(IK)$={matrices trigonalisables}
5. Montrer que $D_n^{+}(IK)$ dense dans $T_n(IK)$
   $D_n^{+}(IK)$={matrices diagonalisables}
6. En déduire que $D_n^{+}(C)$ dense dans $M_n(C)$
7. Montrer que l'application $\varphi : M_n(IK) \times Ik_n[X] \to M_n(IK)$ définie par $\varphi(A,Q) = Q(A)$ est continue
8. En déduire $\chi_A(A)=0$ pour toute matrice $A\in M_n(IK)$

Solution

1. Si $A=\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors $\chi_A(X)=(X-\lambda_1)\ldots(X-\lambda_n)$
   Donc $\chi_A(A)=(A-\lambda_1 I)\ldots(X-\lambda_n I)$
   $A-\lambda_1 I=\mathrm{diag}(0, \lambda_2 - \lambda_1\ldots, \lambda_n -\lambda_1)$, $A-\lambda_2 I=\mathrm{diag}(\lambda_1-\lambda_2, 0, \ldots, \lambda_n -\lambda_2)$
   $A-\lambda_n I=\mathrm{diag}(\lambda_1 - \lambda_n\ldots, \lambda_{n-1} -\lambda_n , 0)$
   Donc $A-\lambda_1 I=\mathrm{diag}(0, 0\ldots, 0)$
2. Si $Q\in IK[X]$, P et $D\in M_n(IK)$, Posons $Q(X)=\sum a_k X^k$
   Donc $Q(PDP^{-1})=\sum a_k (PDP^{-1})^k = \sum a_k PD^k P^{-1} = P\sum a_k D^k P^{-1} = PQ(D) P^{-1}$
3. A est diagonalisable => $A= PDP^{-1}$ => $\chi_A(A)=\chi_A(PDP^{-1})=P\chi_A(D)P^{-1}$
   Or A et D sont semblables, donc $\chi_A(X)=\chi_D(X)$
   En particulier $\chi_A(D)=\chi_D(D)=0$ car D est diagonale
4. Soit $A\in T_n(IK)$, construisons une suites $A_k\in D^{++}_n(IK)$ tq $A_k \to A$
   Principe gle : on modifie les coefficients de la diagonale
   Posons $A=PTP^{-1}$, $sp(A)=sp(T)=\{\lambda_i=t_{ii}\}$
   Posons $T_k= T + \mathrm{diag}(\varepsilon, 2\varepsilon, \ldots, n\varepsilon)$ avec $\varepsilon = 1/k \to 0$ quand $k \to \infty$
   $sp(T_k)= \{\mu_i= \lambda_i +i\, \varepsilon\}$, Cherchons une condition pour que $T_k\in D^{++}_n(IK)$
   $\mu_i = \mu_j \Leftrightarrow \lambda_i + i\, \varepsilon =\lambda j + j\, \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon = (\lambda_i - \lambda_j) / (i - j)$
   On pose $\alpha = \min \{|\lambda_i - \lambda_j| / |i - j| \text{ tq } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ et } i \neq j \}$
   Dans ce cas $\varepsilon<\alpha \Rightarrow \mu_i \neq \mu_j \Rightarrow T_k$ admet des valeurs propres deux à deux distincts avec $T_k = T + \mathrm{diag}(\varepsilon, 2\varepsilon, \ldots, n\varepsilon) \to T$ quand $k \to \infty$
   Posons $A_k=PT_kP^{-1} \to PTP^{-1} =A$
   D'autre part A_k et T_k sont semblables, donc sp(Ak)=sp(Tk),
   Ainsi $A_k\in D^{++}_n(IK)$ et $A_k \to A$ (CQFD)

5. On sait que $D_n^{++}(IK)$={matrices diagonalisable à valeurs propres simples} est dense dans $T_n(IK)$={matrices trigonalisables}
   On sait que $D_n^{+}(IK)$={diagonalisables}, donc $D_n^{++}(IK) \subset D_n^{+}(IK)$
   Donc $D_n^{+}(IK)$ aussi dense dans $T_n(IK)$
   Rappel : Si $A \subset B \subset C$ avec A dense dans C, alors B est dense dans C
6. Quand IK=C, toute matrices est trigonalisable, donc $T_n(C)=M_n(C)$
   $D_n^{+}(C)$ dense dans $T_n(C)=M_n(C)$
7. Soit $\varphi : M_n(IK) \times IK_n[X] \rightarrow M_n(IK)$ définie par $\varphi(A,Q) = Q(A)$
   Par rapport à Q : $\varphi(A,aQ+bR)= (aQ+bR)(A)=aQ(A)+bR(A)$
   Donc φ rapport à Q est linéaire en dimension finie, donc continue
   Par rapport à A : $\varphi(A,Q) = Q(A)=\Sigma a_k A^k$ polynomiale en A en dimension, donc continue par rapport à A
8. $A\in M_n(IK) \Rightarrow A\in M_n(C)$
   Or $D_n^{+}(C)$ dense dans $M_n(C)$, donc il existe une suite $A_k \in D_n^{+}(C)$ tq $\lim A_k=A$,
   Or $A \rightarrow \chi_A(X)$ est continue , donc $\lim \chi_{Ak} = \chi_{\lim Ak}$
   D'autre part Cayley Hamilton est vrai dans $D_n^{+}(C)$, donc $\chi_{Ak}(A_k)=0$
   Mais aussi $\varphi(A_k, \chi_{Ak}) = \chi_{Ak}(A_k) =0$
   $\chi_A(A)= \varphi(A, \chi_A) = \varphi(\lim A_k, \chi_{\lim Ak}) = \lim \varphi(A_k, \chi_{Ak}) =\lim 0 =0$
   CQFD

Classique : Classes de similitude

Rappel : Si $A \in M_n(IK)$, On appelle classe de similitude de A, l'ensemble $S(A)=\{B=PAP^{-1}$ tq P inversible$\}$

Énoncé

1. Justifier que $A \in S(A)$
2. Montrer que $S(A)=S(B) \iff$ A et B sont semblables
3. Soit $A=(a_{ij})$ et $D=diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
   Montrer que $AD = (\lambda_j a_{ij})$ et $DA = (\lambda_i a_{ij})$ et
4. Montrer que $AD=DA, \forall D \in D_n^{++}(IK) \Rightarrow A=\lambda I$
5. En déduire que $AM=MA, \forall M \in M_n(IK) \Rightarrow A=\lambda I$
   Demo Topologique du Lemme de Schur
6. En déduire que $S(A)=\{A\} \iff A=\lambda I$
7. Montrer $0 \in S(A) \iff$ A est nilpotente .
8. Montrer que S(A) est fermée $\iff$ A est diagonalisable
9. Montrer que S(A) est bornée $\iff A=\lambda I$

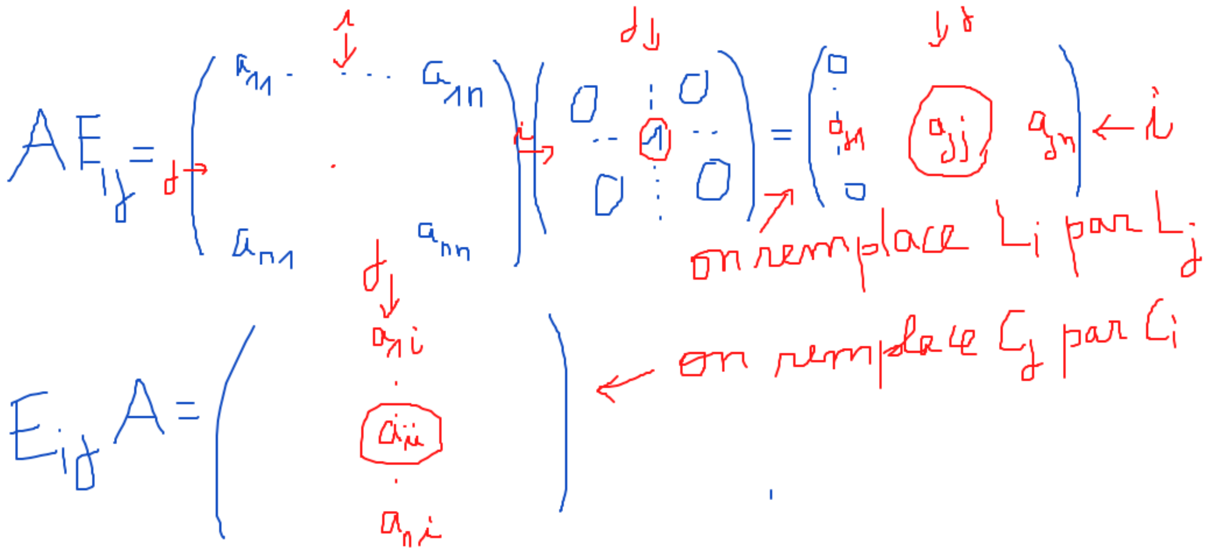
Solution

1. $A \in S(A)$ prendre $P=I_n$
2. Si A et B sont semblables, alors toute matrice semblable à A est aussi semblable à B et inversement, donc $S(A)=S(B)$
   Inversement, si $S(A)=S(B)$, alors $A \in S(A) \Rightarrow A \in S(B)$
3.

$$AD = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_2 a_{12} & \cdots & \lambda_n a_{1n} \\ \lambda_1 a_{21} & \lambda_2 a_{12} & \cdot & \lambda_n a_{2n} \\ \lambda_1 a_{n1} & \lambda_2 a_{n2} & & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$DA = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \cdots & \lambda_1 a_{1n} \\ & & & \\ \lambda_n a_{n1} & \lambda_n a_{n2} & & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix}$$

4. $AM=MA$, $\forall M\in D^{++}_n(IK) \Rightarrow APDP^{-1}=PDP^{-1}A$ où $D=diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ quand $i\neq j$
   $\Rightarrow P^{-1}APD=DP^{-1}AP \Rightarrow BD=DB$ où $B=P^{-1}AP=(b_{ij}) \Rightarrow \lambda_j b_{ij} = \lambda_i b_{ij}$
   $\Rightarrow (\lambda_j - \lambda_i) b_{ij}=0 \Rightarrow b_{ij}=0$ quand $i\neq j$
   $\Rightarrow B=$diagonale
   D'autre part on prend $M=I_n + E_{ij}$
   $AM=MA \Rightarrow ME_{ij}=E_{ij}M \Rightarrow b_{ii}=b_{jj} \Rightarrow B=\lambda I \Rightarrow P^{-1}AP=\lambda I \Rightarrow AP=\lambda PIP^{-1}=\lambda I$



5. $AM=MA$, $\forall M\in M_n(IK) \Rightarrow AM=MA$, $\forall M\in D^{+}_n(IK) \Rightarrow A=\lambda I$
6. Supposons $A=\lambda I$, Alors $M\in S(A)=S(\lambda I) \Rightarrow M=P\,\lambda I\,P^{-1} = \lambda I$
7. Do it
8. Do it
9. Do it

Classique : discontinuité à connaître

1. Montrer que $A \to \pi_A$ est discontinue
2. Montrer que $A \to rg(A)$ est discontinue

Solution

1. $A_n=[1/n \quad 0\,]$
   $[0 \quad -1/n]$
   $sp(A_n)=\{1/n,-1/n\}$ racines obligatoires de $\pi_{A_n}(X)$ et deg $\pi_{A_n}(X) \leq 2$
   Donc $\pi_{A_n}(X)=(X-1/n)(X+1/n) \to X^2$
   $A_n \to A= [0 \quad 0]$
   $[0 \quad 0]$
   $\pi_A(X)= \pi_0(X)=X$
   $\lim \pi_{A_n}(X) = X^2 \neq \pi_{\lim A_n}(X) = X$
2. Même contre exemple
   $rg(A_n)=2 \to 2$, mais $rg(\lim A_n) = rg(0)=0$

Classique : Topologie des hyperplans

Rappel :
On dit H est un hyperplan de E <=> H admet un supplémentaire de dimension 1

Énoncé

1. Soit H hyperplan, montrer que $\forall a \notin H$, on a $E = H \oplus \mathbb{R}.a$
2. Soit H sev de E
3. Montrer que H hyperplan <=> $\exists\ \varphi : E \to \mathbb{R}$ forme linéaire non nulle tq $H = \ker \varphi$
4. Soit H hyperplan,
   Soit $\varphi, \psi : E \to \mathbb{R}$ deux formes linéaires non nulles tq $H = \ker \varphi = \ker \psi$
   Montrer que $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $\varphi = \lambda\, \psi$
   Dans la suite on considère que $H = \ker \varphi$ est un hyperplan
   Soit $a \notin H$, on a $E = H \oplus \mathbb{R}.a$
5. Montrer que φ continue => H fermé
6. Supposons que φ est discontinue
   1. Montrer que $\exists\ (x_n)$ tq $|\varphi(x_n)| > n\, \|x_n\|$
   2. On pose $y_n = x_n / \varphi(x_n)$
      Montrer que $\lim y_n = 0$
      Montrer que $\varphi(y_n) = 1$
   3. Trouver une suite (h_n) tq $h_n \in H$, $h_n \to h \notin H$
   4. En déduire que H n'est pas fermée
7. Donner une CNS pour que un hyperplan $H = \ker \varphi$ soit fermé
8. On rappelle que $|||\ \varphi\ ||| = \sup \{ |\varphi(x)| / \|x\| \text{ tq } x \neq 0\}$
   Montrer que $|\varphi(x)| = |||\ \varphi\ |||\ .\ d(x,H)$ pour tout $x \in E$

Solution

1. .
2. .
3. .
4. .
5. On a $H = \ker \varphi = \{x \in E \text{ tq } \varphi(x) = 0\} = \varphi^{-1}\{0\}$ est un fermé en tant que image réciproque du singleton fermé $\{0\}$par l'application continue φ
6.
   1. Comme φ est linéaire, alors
      φ continue <=> $\exists\ k > 0$ tq $\forall x \in E\ \ |\varphi(x)| \leq k\, \|x\|$

Par contraposée : φ continue <=> $\forall$ k>0 tq $\exists$ $x_k \in$ E $|\varphi(x_k)| > k \|x_k\|$

2. Posons $a_n = |\varphi(x_n)| \in IR$, donc $y_n = x_n / a_n$

   Donc $\|y_n\| = \|x_n\| / a_n = \|x_n\| / |\varphi(x_n)| < 1/n \to 0$

   $\varphi(y_n) = \varphi(x_n) / a_n = \varphi(x_n) / |\varphi(x_n)|$

3. On sait que E= H $\oplus$ IR.a

   Posons $y_n = h_n + \lambda_n.a$ où $h_n \in H = \ker \varphi$

   Donc $1 = \varphi(y_n) = \lambda_n \varphi(a) \Rightarrow \lambda_n | = 1/\varphi(a)$ = cte

   $h_n = y_n - \lambda_n.a \to h = -a/\varphi(a) \notin H$ car $\varphi(h) = -1$

4. H n'est pas fermé car on a trouvé une suite cvge $h_n \in H$ avec $h = \lim h_n \notin H$

7. Selon ce qui précède H=ker φ est fermé <=> φ est continue
8. Soon