My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

مَمُونِي مُولَايِ اسمَاعِيل

MP

Suites Entières

Les Astuces & Les Classiques

Les Annales

Classique 1 : Théorème d'Abel (Comportement aux bords)

Soit $\Sigma a_n z^n$ une série entière de rayon de converge R

$|z| < R \Rightarrow \Sigma a_n z^n$ converge

$\Sigma a_n z^n$ converge $\Rightarrow |z| \geq R$

$|z| > R \Rightarrow \Sigma a_n z^n$ diverge grossièrement

$|z| = R \Rightarrow$?

1. Donner un exemple où $\Sigma a_n z^n$ converge absolument $\forall\ |z| = R$
2. Donner un exemple où $\Sigma a_n z^n$ diverge grossièrement $\forall\ |z| = R$
3. Donner un exemple où $\Sigma a_n z^n$ semi convergente pour $|z| = R$
4. Donner un exemple où $\Sigma a_n t^n$ converge uniformément sur $]-R,R[$
5. Donner un exemple où $\Sigma a_n t^n$ ne converge pas uniformément sur $]-R,R[$
6. On suppose que $a_n > 0$

   Montrer que $\Sigma a_n R^n$ converge $\Leftrightarrow$ $\Sigma a_n t^n$ converge uniformément sur $[0,R[$
7. On suppose que (a_n) ne garde pas un signe constante

   Montrer que $\Sigma a_n R^n$ converge $\Leftrightarrow$ $\Sigma a_n t^n$ converge uniformément sur $[0,R[$
8. Lemmer de Tauber (Mines)

Montrer que $\lim_{t \to R} \Sigma a_n t^n$ finie $\Leftrightarrow$ $\Sigma a_n t^n$ converge uniformément sur $[0,R[$

Solution

1. Prendre $a_n = 1/n^2$, R=1, d'après d'Alembert et

   $|z|=1 \Rightarrow \Sigma\ |1/n^2 z^n| = \Sigma\ 1/n^2$ converge $\forall\ |z| = 1$
2. Prendre $a_n = \sin(n)$, $|a_n| \leq 1 \Rightarrow |a_n z^n| \leq |z|^n \Rightarrow \Sigma a_n z^n$ converge pour tout $|z| < 1$, donc $D(0,1) \subset$ domaine de converge

   or $R = \sup \{ |z| \text{ tq } \Sigma a_n z^n \text{ converge} \}$ donc $R \geq 1$

   D'autre part pour z=1, $a_n z^n = \sin n$ diverge, donc $\Sigma a_n z^n$ diverge $R \leq |z| = 1$, Donc R=1

   $|z|=1 \Rightarrow \Sigma a_n z^n = \Sigma \sin n\, z^n$ diverge car $|\sin n\, z^n| = \sin n|$ diverge
3. Prendre $a_n = 1/n$, R=1, d'après d'Alembert et

   $z=1 \Rightarrow \Sigma\ 1/n\, z^n = \Sigma\ 1/n$ diverge

   $z=-1 \Rightarrow \Sigma\ (-1)^n/n$ converge (CSSA)

4. Prendre $a_n = 1/n^2$, R=1, $\Sigma\ |1/n^2\ z^n| = \Sigma 1/n^2$ converge => $\Sigma\ 1/n^2\ z^n$ converge normalement
5. Prendre $a_n = 1$, R=1, $\Sigma\ |z^n|$ ne converge pas uniformément car sur]-1,1[: $\|t^n\|_\infty = 1$ ne tend pas vers 0
6. Montrons que $\Sigma a_n R^n$ converge <=> $\Sigma a_n t^n$ converge uniformément sur [0,R[

   => : sur [0,R[on a $|a_n t^n| \le |a_n R^n| = a_n R^n$

   Or $\Sigma a_n R^n$ converge, donc $\Sigma a_n t^n$ converge normalement sur [0,R[, en particulier elle converge uniformément

   <= : Supposons que $\Sigma a_n t^n$ converge uniformément sur I=[0,R[
   Comme $\lim_{t\to R} a_n t^n = a_n R^n$ et comme R est une extrémité de I
   D'après le théorème de passage à la limite sous le signe somme, on a

   $\Sigma \lim_{t\to R} a_n t^n$ existe

   $\lim_{t\to R} \Sigma a_n t^n$ existe

   $\Sigma \lim_{t\to R} a_n t^n = \lim_{t\to R} \Sigma a_n t^n$

   Plus précisément : $\Sigma \lim_{t\to R} a_n t^n$ existe, autrement dit $\Sigma\ a_n R^n$ cvge
7. <= Pareil que précédemment : on n'as pas utilisé le signe de a_n

   => Inversement Montrons $S_n(x) = \Sigma_{k=0}^{n} a_k t^k$ converge uniformément

Classique 1 : Résolution d'une équa diff d'ordre 2

Astuce 1

Pour résoudre une équation diff d'ordre 2 de la forme

$$(E) : a(x).y''(x)+b(x).y'(x)+c(x).y(x)=d(x)$$

étape 1 : On pose (EH) : $a(x).y''(x)+b(x).y'(x)+c(x).y(x)=0$

étape 2 : chercher $y_1(x)= \Sigma a_n\, x^n$ solution de (EH)

étape 3 : chercher $y_2(x)= \lambda(x)\, .y_1(x)$ solution de (EH)

Pour cela Il suffit d'injecter l'expression $y_2(x)= \lambda(x)\, .y_1(x)$ dans (EH) et en déduire $\lambda(x)$

étape 4 : On conclut que y_H solution générale de (EH) s'écrit

$$y_H(x)=\lambda_1\, .y_1(x) + \lambda_2\, .y_2(x) : \text{Formule de Lagrange}$$

étape 5 : On conclut que y_P solution particulière de (E) s'écrit

$$y_H(x)=\lambda_1(x).y_1(x) + \lambda_2(x)\, .y_2(x) \text{ (Variation des cte)}$$

étape 6 : On trouve $\lambda_1(x)$ et $\lambda_2(x)$ grace à la formule dite de Lagrange ou Liouville

$$\lambda_1'(x).y_1(x) + \lambda_2'(x)\, .y_2(x) =0$$
$$\lambda_1'(x).y_1'(x) + \lambda_2'(x)\, .y_2'(x)=d(x) / a$$

Astuce 2

Pour trouver $y_1(x)= \Sigma a_n\, x^n$ solution de (EH)

étape 1 : dériver $y_1'(x)= \Sigma n a_n\, x^{n-1}$ et $y_1''(x)= \Sigma n(n-1)a_n\, x^{n-2}$

étape 2 : Injecter ces relations dans (EH)

étape 3 : Effectuer des changement d'indice pour rendre toutes les puissances à une puissance commune

étape 4 : par identification trouver une relation entre a_n, a_{n+1} et parfois a_{n+2}

étape 5 : en déduire a_n en fct de n

étape 6 : Injecter cette expression de an dans $y_1(x)= \Sigma a_n\, x^n$ puis en déduire $y_1(x)$ en utilisant un DSE usuel

Application :
Résoudre $x^2 y'' + 4xy' + 2y = e^x$.

Solution

(EH) : $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0$

$y_1(x)= \Sigma_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ solution de (EH)

$y_1'(x)= \Sigma_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} \Rightarrow 4xy_1'(x)= \Sigma_{n=1}^{\infty} 4na_n x^n$

$y_1''(x)= \Sigma_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \Rightarrow x^2 y_1''(x)= \Sigma_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n$

$x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0 \Rightarrow \Sigma_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \Sigma_{n=1}^{\infty} 4na_n x^n + \Sigma_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n = 0$

$\Rightarrow \Sigma_{n=2}^{\infty} [n(n-1)+ 4n + 2]\, a_n x^n + 6a_1 x + 2a_0 = 0$

$a_0=0$, $a_1=0$ et $(n(n-1)+4n + 2)\, a_n = 0$ pour tout $n\geq2$

$(n^2+3n + 2)\, a_n = 0$ pour $n\geq2$, donc $a_n=0$ tout $n\geq2$

$(n+1)(n+2)a_n = 0$ pour $n\geq2$, donc $a_n=0$ tout $n\geq2$

donc $y_1(x)=0$ (impossible)

Astuce
En cas de problème on cherche $y_1(x)$ solution de (E)

Ici

$2a_0 + 6a_1 x + \Sigma_{n=2}^{\infty} (n+1)(n+2)\, a_n x^n = e^x = 1+ x + \Sigma_{n=2}^{\infty} x^n / n\,!$

Par identification

$2a_0= 1$, $a_1 = 1/6$ et an $= 1/n\,!(n+1)(n+2) = 1/(n+2)\,!$ Pour tout $n\geq2$

$a_n = 1/(n+2)\,!$ Pour tout $n\geq0$

$y_1(x)= \Sigma_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \Sigma_{n=0}^{\infty} x^n /(n+2)\,!$

$=x^{-2} \Sigma_{n=0}^{\infty} x^{n+2} /(n+2)\,! = x^{-2} \Sigma_{n=2}^{\infty} x^n /n\,! = x^{-2} (e^x -1-x)$

Application 2 :
$y''(x) - 2xy'(x) - 2y(x) = \cos(x)$