My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

مَمُونِي مُولَاِي اسمَاعِيل

MATH PrEPaS

MP

Séries Entières

Le Cours Complet
Les Astuces Concours

Objectifs

1. Savoir déterminer le rayon de convergence
2. Savoir calculer les sommes de séries entières (DSE)

1. Rayon de convergence :Modes de convergence

Définition 1

On appelle série entière toute série de fct de la forme $\sum a_n z^n$ où $a_n \in C$, $z \in C$

Définition 2

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière

On appelle rayon de convergence le nombre (fini ou infini) R_a défini par :

$$R_a = \sup \left\{ |z| \text{ tq } \sum a_n z^n \text{ converge} \right\}$$

Théorème 1 : A retenir

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_a

On a les résultats suivants

1. $|z| < R_a \Rightarrow \sum a_n z^n$ converge
2. $|z| > R_a \Rightarrow \sum a_n z^n$ diverge

Théorème 2 : A retenir

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_a

On a les résultats suivants

1. $\sum a_n z^n$ converge $\Rightarrow |z| \leq R_a$
2. $\sum a_n z^n$ diverge $\Rightarrow R_a \leq |z|$

Remarques

Si $|z| = R_a$, on ne peut rien dire
Si $|z| \leq R_a$, on ne peut rien dire
Si $|z| \geq R_a$, on ne peut rien dire

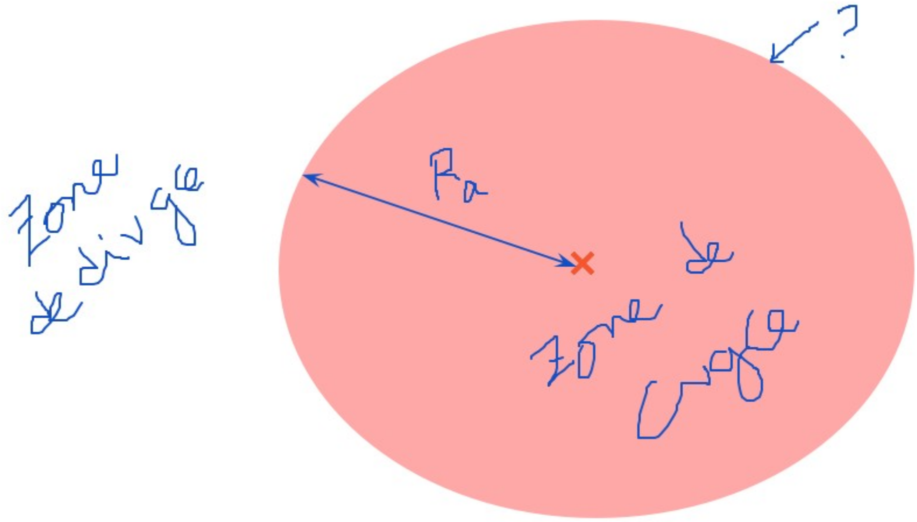
Exemple : $\sum (z^n / n)$

$|z|<1 \Rightarrow |z^n / n| \leq |z^n|$ et $\sum |z^n|$ converge, donc $\sum (z^n / n)$ converge

$\Rightarrow |z| \leq R_a$, $\forall |z|<1 \Rightarrow R_a \geq 1$

Pour z=1, $\sum (z^n / n)$ diverge, donc $R_a \leq 1$, donc $R_a = 1$

Alors $\sum 1/n$ diverge pour z=1 et $\sum (-1)^n / n$ converge pour z=-1



Théorème 3 : Lemme d'Abel (version de convergence)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_a

Soit $z_0 \in C$, on a les résultats suivants

1. Si $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument $\forall$ z tq $|z|<|z_0|$
2. Si $a_n z_0^n \to 0$, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument $\forall$ z tq $|z|< |z_0|$
3. Si $\sum a_n z_0^n$ converge, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument $\forall$ z tq $|z|< |z_0|$

Demo : Idée à apprendre

1. Soit $M>0$ tq $|a_n z_0^n| \leq M$, donc $| a_n z^n |=| a_n z_0^n (z/z_0)^n| \leq Mq^n$
   où $|q|=|z/z_0|<1$, donc $\sum q^n$ converge
2. Découle de 1, car $a_n z_0^n \to 0 \Rightarrow (a_n z_0^n)$ est bornée
3. Découle de 2, car $\sum a_n z_0^n$ converge $\Rightarrow a_n z_0^n \to 0$

Théorème 4 : Lemme d'Abel (version de divergence)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_a

Soit $z_0 \in C$, on a les résultats suivants

1. Si $\sum a_n z_0^n$ diverge, alors $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement $\forall$ z tq $|z| > |z_0|$
2. Si $a_n z_0^n$ ne tend pas vers 0, alors $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement $\forall$ z tq $|z| > |z_0|$
3. Si $a_n z_0^n$ n'est pas bornée, alors $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement $\forall$ z tq $|z| > |z_0|$

Demo

1. Par l'absurde, supposons $\exists$ z tq $|z| > |z_0|$ $\sum a_n z^n$ ne diverge pas grossièrement, en particulier $a_n z^n \to 0$ et comme $|z_0| < |z|$, alors selon le lemme d'Abel (version 1), alors $\sum a_n z_0^n$ diverge (Contradiction)
2. Découle de 1
3. Découle de 2

Théorème 5

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_a

On a les résultats suivants

- $|z| < R_a \Rightarrow \sum a_n z^n$ converge absolument
- $|z| > R_a \Rightarrow \sum a_n z^n$ diverge grossièrement
- $|z| > R_a \Rightarrow$???

Théorème 6

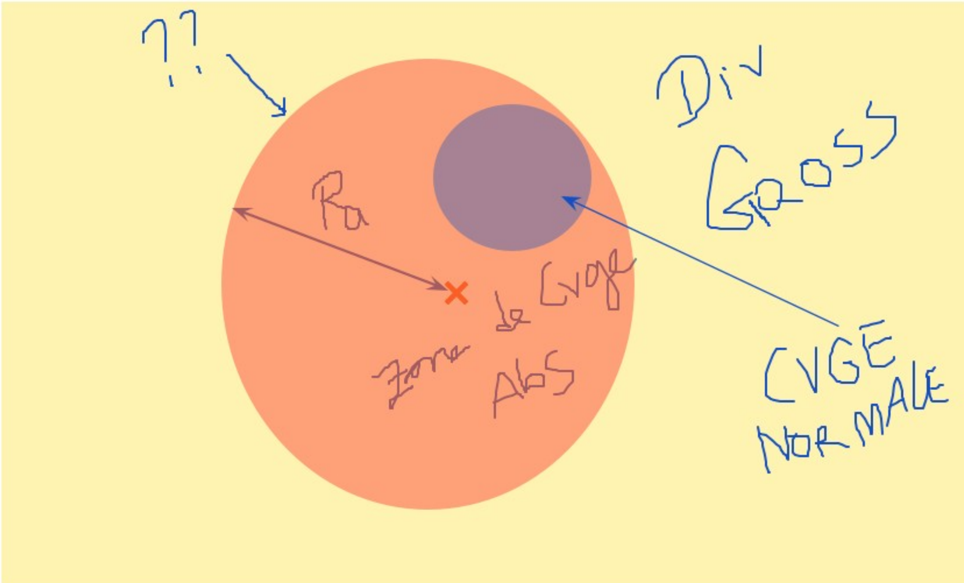
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_a

On a les résultat suivant

$$|z| \leq r < R_a \Rightarrow \sum a_n z^n \text{ converge normalement}$$

Demo

$|a_n z^n| \leq |a_n r^n|$ avec $\sum |a_n r^n|$ converge car $r < R_a$ d'où le converge normale



Théorème 7 : fondamental

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_a
On a les résultat suivant

- $\sum a_n t^n$ est de classe C^∞ sur $]-R_a , R_a[$

- $\int_a^b \sum a_n t^n \, dt = \sum \int_a^b a_n t^n \, dt$ pour tout segment $[a,b] \subset \;]-R_a , R_a[$

Demo

- étape 1 : $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^{n-1}$ ont même rayon de convergnce
- étape 2 : appliquer les thm généraux des series de fcts

Astuce
En particulier on peut dériver une série entière de rayon de convergence R_a sur $]-R_a , R_a[$ terme à termes autant de fois voulus
En particulier on peut intégrer une série entière de rayon de convergence R_a sur tout tout segment $[a,b] \subset \;]-R_a , R_a[$ terme à termes autant de fois voulus

1. Rayon de convergence : Méthodes de Calcul

Méthode 1 : D'Alembert
On calcul $L=\lim |a_{n+1} / a_n|$
On conclut que $R_a=1/L$

Méthode 2 : Règle des équivalents
Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a=R_b$

Demo
$a_n \sim b_n \Rightarrow a_n / b_n \rightarrow 1$ et $b_n / a_n \rightarrow 1 \Rightarrow a_n / b_n$ et b_n / a_n sont bornée
$\Rightarrow a_n=O(b_n)$ et $b_n=O(a_n) \Rightarrow R_a \geq R_b$ et $R_b \geq R_a \Rightarrow R_a = R_b$

Méthode 3 : Règle des majorations
Si $|a_n| \leq |b_n|$, alors $R_a \geq R_b$

Demo
$z \in D(0,R_b)$ (ouvert) $\Rightarrow |z| < R_b \Rightarrow \sum b_n z^n$ converge absolument
$\Rightarrow \sum a_n z^n$ converge absolument (car $|a_n| \leq |b_n|$)
$\Rightarrow |z| \leq R_a \Rightarrow z \in D(0,R_a)$ (fermé)
Ainsi $D(0,R_b)$ (ouvert) $\subset D(0,R_a)$ (fermé)
Donc $R_a \geq R_b$

Remarque
La Méthode 3 est encore valable si $a_n=o(b_n)$ ou bien $a_n=O(b_n)$

Remarque
La méthode 3, permet juste de majorer ou minorer le rayon de converge mais ne permet de le calculer
On peut toute fois utiliser les astuces suivantes

Astuce
Si $|b_n| \leq |a_n| \leq |c_n|$, tq $R_b = R_c$, alors $R_a = R_b = R_c$
Si $\exists z_1$, z_2 tq

- $|z_1| = |z_2|$
- $\sum a_n z_1^n$ converge et $\sum a_n z_2^n$ diverge

Alors $R_a=|z_1| = |z_2|$

Exemple

$\Sigma 1/n$ diverge et $\Sigma(-1)^n/n$ diverge donc $R_a=1$ pour $\Sigma z^n/n$

Méthode 4 : Cas des séries lacunaires

Rappel : Une série entière $\Sigma a_n z^n$ est dite lacunaire quand une infinité de ses coefficients sont nuls

Autrement dit : toutes les puissances ne sont pas présentes

Forme générale : $\Sigma a_n z^{\varphi(n)}$

Exemples

- Σ 3n z^{2n} est lacunaire car Σ 3n $z^{2n} = 3z^2 + 3z^4 + 9z^6 + \dots$
- Σ sin(n) $z^{n°2}$ est lacunaire car Σ cos(n) $z^{n°2} = \cos(0) + \cos(1) z + \cos(2) z^4 + \cos(3) z^9 + \dots$

Astuce : D'Alembert version série numérique

On pose $w_n = a_n z^{\varphi(n)}$ (w_n dépend de z)

On calcule $L=\lim | w_{n+1} / w_n |$ (L dépend de z)

On déduit R tq $L < 1 \Leftrightarrow |z|<R$

On conclut que $R_a=R$

$\sum 2^n z^{3n}$: $w_n = 2^n z^{3n}$, $\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| = 2|z^3| < 1 \Leftrightarrow |z^3| < 1/2$

$\Leftrightarrow |z| = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = R_a$

$\sum 3^n z^{n^2}$: $\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| = 3|z|^{2n+1} \xrightarrow{L=} 0$ ssi $|z|<1$

donc $R_a = 1$

3. Développement en série entière (DSE)

Définition
Une fct f : IR $\rightarrow$ IR est dite développable en série entière (DSE) au voisinage de 0 <=> elle existe une série entière $\sum a_n z^n$ tq $f(x)= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur un intervalle $]-r,r[$ avec $r \leq R_a$

Exemples

1. $1/(1-x)= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ sur $]-1,1[$ avec $R_a =1$
2. $e^x= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n / n\,!$sur $]-\infty,+\infty[$ avec $R_a =+\infty$

Théorème 1

Toute fct f : IR $\rightarrow$ IR DSE au voisinage de 0 est de classe $C^{+\infty}$ sur un voisinage de 0 de la forme $]-r,r[$
Son DSE est donnée par la formule suivante

$$f(x)= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \ \forall\, x \in\ ]-r,r[\ ,$$
$$\text{avec } a_n=f^{(n)}(0)/\, n\,!$$

Remarque
La réciproque du thm précédent n'est pas toujours vrai
cad : une fct de de classe $C^{+\infty}$ au voisinage de 0 n'est pas forcément DSE au voisinage de 0

Contre Exemple Populaire : Extrait Centrale
$f(t) \quad = \exp(-1/t^2) \qquad \text{si } t \neq 0$
$\qquad\ \ = 0 \qquad\qquad\qquad \text{si } t=0$

1. Montrer que f est de classe $C^{+\infty}$ sur IR*
2. Montrer que f est de classe $C^{+\infty}$ en 0, avec $f^{(n)}(0)=0,\ \forall\, n \in$ IN
3. En déduire que f est de classe $C^{+\infty}$ sur IR
4. Montrer que f n'est pas DSE au voisinage de 0

Théorème 2

Soit fct f : IR → IR de classe $C^{+\infty}$ sur un voisinage de 0 de la forme]-r,r[

Alors

f est DSE au voisinage de 0 <=> $R_n(x)=\int_0^x \left[(x-t)^n/n\,!\right].f^{(n+1)}(t)\,dt$ converge vers 0 uniformément

Demo

Utiliser la formule de Taylor de avec reste intégrale

DSE Usuelles à Apprendre

$$\begin{array}{rcll}
\frac{1}{1-x} &=& 1+x+x^2+\cdots+x^n+\ldots & R=1\\
\frac{1}{1+x} &=& 1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+\ldots & R=1\\
\ln(1-x) &=& -x-\frac{x^2}{2}-\cdots-\frac{x^n}{n}+\ldots & R=1\\
\ln(1+x) &=& x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots & R=1
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
\arctan x &=& x-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots & R=1\\
\mathrm{arctanh} x &=& x+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots & R=1
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
e^x &=& 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\ldots & R=+\infty\\
\sin x &=& x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots & R=+\infty\\
\cos x &=& 1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots & R=+\infty\\
\cosh x &=& 1+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots & R=+\infty\\
\sinh x &=& x+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots & R=+\infty
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
(1+x)^\alpha &=& 1+\alpha x+\cdots+\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!}+\ldots & R=1\\
\arcsin x &=& x+\frac{x^3}{6}+\cdots+\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots & R=1\\
\mathrm{arcsinh} x &=& x-\frac{x^3}{6}+\cdots+(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots & R=1
\end{array}$$

Astuce 1

Pour montrer que f est DSE au voisinage de 0, il suffit de

1. Montrer que f est de classe C^∞ au voisinage de 0
2. Trouver r>0 tq on peut majorer $|R_n(x)| \leq \varepsilon_n$

$$\text{où } R_n(x)=\int_0^x \left[(x-t)^n/n\,!\right].f^{(n+1)}(t)\,dt$$

3. Montrer que $\varepsilon_n \to 0$

Astuce 2

Pour trouver le DSE de f au voisinage de 0, on peut utiliser :

Méthode 1 :

- Écrire f comme dérivée ou primitive d'un DSE usuel puis dériver ou intégrer terme à terme

Méthode 2 :

- Écrire f=g+h où g et h DSE usuel puis utiliser la relation

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)\, x^n$$

Méthode 3 :

- Écrire f=g.h où g et h DSE usuel puis utiliser la relation

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right).\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, x^n\right.$$

$$\text{où } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$