E est un $\mathbb{K}$-ev où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ et F sev de E.

Cas réel

Produit scalaire: Une forme réelle
Linéaire à droite: $\langle x, y+\lambda z\rangle = \langle x,y\rangle + \lambda\langle x,z\rangle$
Symétrique: $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$
Définie: $\langle x,x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0_E$
Positive: $\langle x,x\rangle \geq 0, \forall x\in E$
E: Pré-hilbertien — de Hilbert si E complet, euclidien quand $\dim E$ fini

Identités de polarisation

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$

$< x,y >= \dfrac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$

$< x,y >= \dfrac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}$

Identité du Parallélogramme

$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Théorème de Pythagore:

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow < x,y >= 0$

Thèmes Classiques:
Calcul de distances
Gram-Schmidt
Matrices et déterminants de Gram
Polynômes orthogonaux

Cas complexe

Produit hermitien: Une forme complexe
Sesquilinéaire: $\langle x, y+\lambda z\rangle = \langle x,y\rangle + \lambda\langle x,z\rangle$
$< x,y >= \overline{< y,x >}$
Définie: $< x,x >= 0 \Rightarrow x = 0_E$
Positive: $< x,x >\geq 0, \forall x\in E$
E: Pré-hilbertien — de Hilbert si E complet, hermitien quand $\dim E$ fini

Identités de polarisation

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2$

$\|x+iy\|^2 = \|x\|^2 - 2\mathrm{Im}\langle x,y\rangle + \|y\|^2$

$\mathrm{Re}\langle x,y\rangle = \dfrac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} = \dfrac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}$

$\mathrm{Im}\langle x,y\rangle = \dfrac{\|x-iy\|^2 - \|x+iy\|^2}{4} = \dfrac{\|x-iy\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}$

Orthogonalité

Norme: $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$
Cauchy-Schwartz: $|< x,y >| \leq \|x\|\,\|y\|$
égalité $\Leftrightarrow \{x,y\}$ liée.
Inégalité triangulaire:
$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
Unitaire (normalisé): $\|x\| = 1$

Vecteurs orthogonaux: $\langle x,y\rangle = 0$
Famille orthogonale: $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ si $i\neq j$.
Famille orthonormale: $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$
orthonormale $\Rightarrow$ libre
Tout sev de dim finie admet une bon
Orthogonal: $F^\perp = \{x\in E\ : \langle x,y\rangle = 0\ \forall y\in F\}$
$F\cap F^\perp = 0$. Si $\dim F$ finie, $E = F\oplus F^\perp$

Gram-Schmidt: $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ libre
On construit $(e'_i)_{1\leq i\leq n}$ orthogonale
$e'_1 = e_1$
$e'_2 = e_2 + \lambda e'_1\ \langle e'_2, e'_1\rangle = 0$
$e'_n = e_2 + \lambda_1 e'_1 + \ldots + \lambda_{n-1}e'_{n-1}$
$\langle e'_n, e'_1\rangle = \ldots = \langle e'_n, e'_{n-1}\rangle = 0$
$\mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_k) = \mathrm{Vect}(e'_1,\ldots,e'_k)$, $\forall 1\leq k\leq n$
Si $\dim F$ finie et $(e_1,\ldots,e_n)$ b.o.n de F
Si $x,y\in F$, alors:

$x = \sum_{i=1}^n \langle e_i, x\rangle e_i$, $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle\langle e_i, y\rangle$

Parseval: $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle e_i,x\rangle|^2\ (x\in F)$

Projection Orthogonal: $\dim F$ finie, $x\in E$

$(e_1,\ldots,e_n)$ b.o.n de F, $p_F(x) = \sum_{i=1}^n \langle e_i,x\rangle e_i \in F$

$x - p_F(x)\in F^\perp$, $\mathrm{Im}p_F = F$, $\ker p_F = F^\perp$

$d^2(x,F) = d^2(x,p_F(x)) = \sum_{i=n+1}^m |\langle e_i,x\rangle|^2$

$(e_i)_{n+1\leq i\leq m}$ bon de $F^\perp$

Bessel: $\|p_F\|(x) \leq \|x\|\ (\sum_{i=1}^n |\langle e_i,x\rangle|^2 \leq \|x\|^2)$