Préparation aux Concours

Calcul Différentiel

Thème 1 : Fonctions de classe C1

Exercice1: On pose : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}, f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f(0,0) = 0$.

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

Exercice2: Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases} .$$

1. Prouver que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2-xy \geqslant \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.
2. (a) Quel est le domaine de définition de f ?
   (b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.
   (a) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$ et les calculer.
   (b) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et donner leur valeur.
   (c) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice3:

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.
   (b) Donner la définition de "f différentiable en $(0,0)$".
2. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice4: On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

1) Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$

2) A l'aide de l'étude en $(0,0)$ montrer qu'elle n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$.

Thème 2 : Formule des chaînes & EDP

Exercice1: Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. On définit les fonctions g et h suivantes :

$$g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & f(y,z,x) \end{array} \quad , \quad h: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(y,x,x+y) \end{array}$$

Calculer les dérivées partielles premières de g et h en fonctions de celles de f.
Retrouver les résultats en calculant les différentielles.

Exercice2: Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
On dit que f est homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$ si, et seulement si,

$$\forall t > 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$$

1) Montrer que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y)$$

2) Etablir la réciproque.

Exercice3:
Déterminer les fonctions $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant :

1) $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2+x}{y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2+y}{x} \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1-y}{(x+y+1)^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2+x}{(x+y+1)^2} \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y^2}{(x+y)^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x^2}{(x+y)^2} \end{cases}$

Exercice4:
Résoudre l'équation $2\dfrac{\partial f}{\partial x} + 3\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4f$ avec la *condition aux limites* : $f(t,t) = t$ $(t \in \mathbb{R})$.

Exercice5: Déterminer les applications f de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant : $\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = a$ où a est une constante réelle donnée.

Exercice6: Soit U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$: $U = \{(x,y) \text{ tq } x > 0,\ y > 0\}$. Trouver les applications $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2$. On utilisera le changement de variable : $u = xy$, $v = \dfrac{y}{x}$.

Exercice7: Résoudre sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: $x\dfrac{\partial f}{\partial x} = -y\dfrac{\partial f}{\partial y}$, en posant $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta. \end{cases}$

Exercice8: Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0\}$. On considère l'équation aux dérivées partielles :

$$a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

où f est une fonction inconnue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$.
Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \neq \beta$. On fait le changement de variables : $u = x + \alpha y$, $y = x + \beta y$.

1) Ecrire l'équation aux dérivées partielles obtenue après le changement de variables.

2) En déduire que l'on peut ramener l'équation de départ à l'une des trois formes réduites suivantes :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0 \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0$$

Exercice9:
Trouver les applications $f : (\mathbb{R}^{+*})^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant : $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} + 2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = 0$. On utilisera le changement de variables : $u = xy$, $v = \dfrac{x}{y}$.

Exercice10:
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

① Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes : $g_1(x,y) = f(y,x)$, $g_3(x,y) = f(y, f(x,x))$.

② Calculer les dérivées des fonctions suivantes : $h_1(x) = f(x,x)$, $h_2(x) = f(x, f(x,x))$

③ Calculer les dérivées des fonctions suivantes : $h_1(x) = f(u(x), v(x))$, $h_2(x) = f(u(x), f(v(x), w(x)))$ où u, v, w trois fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Thème 3 : Différentiabilité

Exercice1:

1) Etudier le prolongement par continuité probable en $(0,0)$ des fonctions définies par les expressions suivantes :

a) $f(x,y) = \dfrac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}$

b) $f(x,y) = \dfrac{\sin(x)\sin(y)-\sin(xy)}{x^2+y^2}$

c) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

d) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{\sqrt{x^4+y^4}}$

2) Lorsque les fonctions sont prolongeables par continuité, étudier la différentiabilité des fonctions.

Exercice2: Justifier que la fonction f définie sur $\mathbb{C}^*$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ par $f(z) = \dfrac{1}{z}$ est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice3:

1) Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui à M associe M^3.
Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et préciser sa différentielle en tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Mêmes questions pour $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui à M associe $\mathrm{tr}(M^4)$.

3) Mêmes questions pour $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui à M associe $\det(M)$.

Exercice4: Montrer que l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $P \mapsto \displaystyle\int_0^1 P^2(t)\,dt$ est différentiable et exprimer sa différentielle.

Exercice5: On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ suivante :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = \big(2xy, \arctan(x+y), \cos(2x^2+y)\big)$$

1) Calculer, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, $df(a,b)(h,k)$.

2) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = \big(\sin(t), t - \sin^2(t)\big)$$

(a) Calculer $\varphi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(b) En déduire la dérivée de $t \mapsto f \circ \varphi(t)$

(c) Retrouver le résultat en commençant par calculer pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f \circ \varphi(t)$.

Exercice6: Soit f l'application de $\mathscr{G}l_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui à M associe M^{-1}.
Montrer que f est différentiable en tout point de $\mathscr{G}l_n(\mathbb{R})$ et que, pour $A \in \mathscr{G}l_n(\mathbb{R})$, on a $df(A) : M \mapsto -A^{-1}MA^{-1}$

Thème 4.a : Extremums libres

Exercice1: Rechercher les extremum locaux des fonctions suivantes :

1) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$

2) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$

3) $f(x,y) = x\left(\ln^2(x) + y^2\right)$

Exercice2: Point non extrémal

On pose pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x^2y - \frac{4x^6y^2}{(x^4+y^2)^2} \quad \text{si } (x,y) \neq 0, \qquad f(0,0) = 0.$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé et $g_\theta(r) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Montrer que g_θ admet un minimum local strict en $r = 0$.

3) Calculer $f(x, x^2)$. Conclusion ?

Exercice3:

Etudier les extremums de $(x,y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

Exercice4: Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On définit sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ la fonction f par $f(x,y) = x + y + \frac{a}{xy}$.

Montrer que f admet un minimum strict.

Exercice5: Déterminer

$$\sup_{(x,y)\in[0,\pi/2]^2} \left(\sin(x)\sin(y)\sin(x+y)\right)$$

Exercice6: Etudier les extremums de $(x,y) \mapsto 9 + 14x + 4y + x^2 - 8xy - 8y^2 + xy^2 + 2y^3$

Exercice7

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 5x^2 - 6xy + 2x + 2y^2 - 2y + 1$.

1. Calculer les dérivées partielles premières de f.

2. Déterminer l'unique point (a,b) en lequel f est suceptible de présenter un extremum local.

3. Prouver que f atteint un minimum en (a,b).

4. Calculer, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $5\left(x - \frac{3}{5}y + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}(y-2)^2$.

En déduire que f admet un minimum global su $\mathbb{R}^2$.

Quelle est la valeur de ce minimum ?

Thème 4.b : Extremums liés

Exercice1

Étudier les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \exp(axy)$, $a > 0$ sous la contrainte $x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0$.

Exercice2

Soit $n \geq 2$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 \cdots x_n$. On note $\Gamma = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n ;\ x_1 + \cdots + x_n = 1\}$.

1. Démontrer que f admet un maximum global sur Γ et le déterminer.
2. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique : pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, on a

$$\prod_{i=1}^n x_i^{1/n} \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

Thème 4 : Un peu de tout

Exo 1 **Différentielle d'une forme quadratique.**

① Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ et f la forme bilinéaire symétrique associée.
Montrer que : $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $dq_{\vec{x}}(\vec{y}) = 2f(\vec{x}, \vec{y})$.

② Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en déduire la différentielle de l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X & \longmapsto & {}^tXMX \end{array}$

Exo 2 **Différentielle du déterminant.**

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \det M \end{array}$

① Montrer que f est et que l'on a pour $M, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
$$df_M(H) = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{com}(M).H)$$

② **Application** : soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P_M(X) = (-1)^n X^n + \cdots + a_1 X + \det(M)$.
Montrer $a_1 = \mathrm{tr}(\mathrm{com}(A))$.

Exo 3 **Formule de Leibniz.**

Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que
$$\frac{\partial^n (fg)}{\partial x^k \partial y^{n-k}} = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{n-k} C_k^i C_{n-k}^j \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j} . \frac{\partial^{n-i-j} g}{\partial x^{k-i} \partial y^{n-k-j}}.$$

Exo 4 **Laplacien.**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On pose
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2} \quad \text{laplacien de } f.$$

① **Laplacien en coordonnes polaires.**

On pose $g(\rho, \theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$.

a Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial \rho}, \dfrac{\partial g}{\partial \theta}, \dfrac{\partial^2 g}{(\partial \rho)^2}, \dfrac{\partial^2 g}{(\partial \theta)^2}$ en fonction des drives partielles de f.

b Exprimer Δf en fonction des drives de g.

② **Laplacien en coordonnes sphériques.**

Soient $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, soit
$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, \varphi) & \longmapsto & (x = r\cos\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\cos\varphi, z = r\sin\varphi) \end{array}$$

et $F = f \circ \Phi$. On pose $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{(\partial x)^2} + \dfrac{\partial^2 f}{(\partial y)^2} + \dfrac{\partial^2 f}{(\partial z)^2}$ laplacien de f.

vérifier que : $(\Delta f) \circ \Phi = \dfrac{\partial^2 F}{(\partial r)^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial F}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 F}{(\partial \varphi)^2} - \dfrac{\tan\varphi}{r^2}\dfrac{\partial F}{\partial \varphi} + \dfrac{1}{r^2\cos^2\varphi}\dfrac{\partial^2 F}{(\partial \theta)^2}$.

Pour cet exercice, il est conseillé de prendre la feuille dans le sens de la longueur, et d'y aller calmement, en vérifiant ses calculs.

Exo 5

Laplacien en dimension finie.

① Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$.
On définit une application F de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ par :
$F(x_1,\ldots,x_n) = f(\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2})$. Calculer le laplacien $(\Delta F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{(\partial x_i)^2})$ de F en fonction de f.

② Soit u une fonction réelle des variables réelles x et y définie par $u(x,y) = (F\circ r)(x,y)$ o $r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ et F est une fonction réelle d'une variable réelle.
On pose : $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

a Calculer : $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}$. En dduire que $\Delta u = F''(r) + \frac{F'(r)}{r}$.

b En déduire Δu lorsque $u(x,y) = \ln(x^2+y^2)$.

Exo 6

Fonctions harmoniques.

Une fonction f réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U est dite harmonique si elle vérifie l'EDP suivantes : $\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2} = 0$, i.e. $\Delta f = 0$.

① **Les polynômes complexes sont harmoniques** .
Soient $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer que la fonction complexe f définie par
$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,y) & \longmapsto & P(x+iy). \end{array}$ est harmonique.

② Soit f :$]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On considère
$g : \begin{array}{ccc} D\subset\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} y}\right). \end{array}$
déterminer f pour que g soit harmonique.

③ Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $u = x^2-y^2$, $v = 2xy$.
Soit $F \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & F(u,v) \end{array}$ et f définie par : $f(x,y) = F(u,v)$.
Montrer que F harmonique entraîne que f est harmonique.

Exo 7

$\mathcal{C}^1$-difféomorphismes.

① **a** Montrer que $f(x,y) = (x+y, xy)$ induit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V où U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$ à préciser.

b Chercher l'expression de f^{-1} et vérifier que le produit des matrices jacobiennes est gal I.

② Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (e^{2y}+e^{2z}, e^{2x}-e^{2z}, x-y). \end{array}$
Montrer que f induit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur un ouvert à préciser.

Exo 12 — **Contre-exemples au théorème de Schwarz.**

① Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction π-périodique de classe $\mathcal{C}^2$.
On pose pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$: $g(x,y)=r^2 f(\theta)$ avec $(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$.

- **a** Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,y)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,0)$ en fonction de f.
- **b** En déduire les valeurs de $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(0,0)$.
- **c** Construire un exemple précis (donner $g(x,y)$ en fonction de y) pour lequel ces deux drives sont distinctes.

② (Centrale MP 2003)
Soit $f(x,y)=\dfrac{x^3y}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq 0$ et $f(0,0)=0$.

- **a** Étudier la continuité de f et de ses dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$.
- **b** Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.

Exo 9

Soient $a,b,c\in\mathbb{R}$ non tous nuls. On considère l'équation aux dérivées partielles :

$$(*)\quad a\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}+b\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}=0$$

Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ distincts, fixés. On fait le changement de variable : $u=x+\alpha y$, $v=x+\beta y$.

① Écrire l'équation déduite de $(*)$ par ce changement de variable.

② En déduire que l'on peut ramener $(*)$ à l'une des trois formes réduites :

$$(1):\ \frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}=0,\qquad (2):\ \frac{\partial^2 g}{(\partial u)^2}=0,\qquad (3):\ \frac{\partial^2 g}{(\partial u)^2}+\frac{\partial^2 g}{(\partial v)^2}=0.$$

Exo 10 — **Aire maximal d'un triangle.**

Soit ABC un triangle de cotés a,b,c.

① Calculer l'aire, S, de ABC en fonction de a,b,c.

② Montrer que $\dfrac{S}{a^2+b^2+c^2}$ est maximal lorsque ABC est équilatral.

Exo 11 — **Distances aux sommets d'un triangle.**

Soit $A\in\mathbb{R}^p$ fixé, $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^p&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ M&\longmapsto&AM^2\end{array}$ et $g\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^p&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ M&\longmapsto&AM\end{array}$ (distance euclidienne)

① Calculer les gradients de f et g en un point M.

② Soient A,B,C trois points non alignés du plan. Trouver les points M du plan réalisant le minimum de :

- **a** $MA^2+MB^2+MC^2$.
- **b** $MA+MB+MC$.
- **c** $MA.MB.MC$.

Á la prochaine