My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

Td Algèbre Générale

Les Groupes Cycliques

Exercice 1

Soit G un groupe fini d'ordre n.

1) On suppose que G est cyclique.
   a) Montrer que tout sous-groupe de G est cyclique.
   b) Montrer que pour tout diviseur d de n dans $\mathbb{N}$, il existe un et un seul sous-groupe de G d'ordre d.
2) Pour tout diviseur d de n, on désigne par $c(d)$ le nombre de sous-groupes cycliques d'ordre d de G et pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $\varphi(k)$ le nombre d'entiers entre 1 et k, premiers avec k (indicatrice d'Euler de k).
   a) Montrer que si H est un sous-groupe cyclique d'ordre d de G, le nombre de ses éléments générateurs est $\varphi(d)$.
   b) Démontrer alors la relation : $$n = \sum_{d|n} c(d)\varphi(d).$$
   (La somme est étendue à tous les diviseurs de n.)
3) En déduire que : $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n = \sum_{d|n} \varphi(d).$$
4) Montrer que si le groupe G possède, pour tout diviseur d de n, au plus un sous-groupe cyclique d'ordre d, alors G est cyclique.

Exercice 2

Soit p un nombre premier. L'objet de cet exercice est de répertorier les groupes finis à $2p$ éléments. Soit G un tel groupe. On notera la loi multiplicativement et e le neutre de G.

1) Donner les ordres possibles d'un élément de G différent de e.
2) Donner un exemple de groupe cyclique G d'ordre $2p$, en précisant l'ordre de chacun des éléments.
3) Dans cette question, on suppose que G n'est pas cyclique.
   a) Montrer que G possède au moins un sous-groupe cyclique d'ordre p.
   b) Montrer que si $p > 2$, G contient au plus un sous-groupe cyclique d'ordre p.
   c) Décrire alors G.
4) Donner un exemple d'un groupe non cyclique G d'ordre $2p$, en précisant l'ordre de chacun de ses éléments.