RÉSEAU IBNGHAZI CPGE
MP*1-Rabat
Groupe 3

My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

TD Algèbre Générale

Notion d'idéal

Soit A un anneau commutatif et $\mathcal{I}$ un idéal de A.

1) *Idéal premier.* On dit que $\mathcal{I}$ est un idéal premier si et seulement si $\mathcal{I}$ est différent de A, et pour tous a et b de A, on a

$$ab \in \mathcal{I} \text{ et } a \notin \mathcal{I} \Longrightarrow b \in \mathcal{I}.$$

Exercice1 . *Idéaux et morphismes d'anneaux.*
Soit A, B deux anneaux commutatifs, $\varphi : A \longrightarrow A$ un morphisme d'anneaux et $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ deux idéaux de A et B respectivement.

1) a) Montrer que $\varphi^{-1}(\mathcal{J})$ est un idéal de A.
   b) Montrer que si $\mathcal{J}$ est premier, alors $\varphi^{-1}(\mathcal{J})$ est aussi premier.
2) a) On suppose que φ est surjectif, montrer alors que $\varphi(\mathcal{I})$ est un idéal de B.
   b) Montrer à l'aide d'un contre-exemple, que ce résultat n'est pas toujours vrai quand φ n'est pas surjective.

Exercice2 . *Radical d'un idéal.*
Soit A un anneau commutatif et $\mathcal{I}$ un idéal de A, on appelle *radical* de $\mathcal{I}$, noté

$$\sqrt{\mathcal{I}} = \{x \in A / \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } x^n \in \mathcal{I}\}$$

0)D´eterminer $\sqrt{.0}$

1) Déterminer $\sqrt{30\mathbb{Z}}$.
2) Soient $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ deux idéaux de A. Montrer les propriétés suivantes :

a) $\mathcal{I} \subset \sqrt{\mathcal{I}}$.
b) $\sqrt{\sqrt{\mathcal{I}}} = \sqrt{\mathcal{I}}$.
c) $\sqrt{\mathcal{I}\mathcal{J}} = \sqrt{\mathcal{I} \cap \mathcal{J}} = \sqrt{\mathcal{I}} \cap \sqrt{\mathcal{J}}$.
d) $\sqrt{\mathcal{I} + \mathcal{J}} = \sqrt{\sqrt{\mathcal{I}} + \sqrt{\mathcal{J}}}$.
e) $\sqrt{\mathcal{I}} = A \Longleftrightarrow \mathcal{I} = A$.