CPGE RÉSEAU IBNGHAZI
MP*1-Rabat
Groupe 3

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

TD Algèbre Générale

Notion de Groupes

Exercice 1

Sur l'ensemble $G =]-1,1[$, on définit la loi $*$ par : $\forall (a,b) \in G^2, a * b = \dfrac{a+b}{1+ab}$.

1) Montrer que $(G,*)$ est un groupe abélien. L'ensemble $[0,1[$ est-il un sous-groupe de $(G,*)$?
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $a \in G$, $a^{(n)} = a * a * \cdots * a = \dfrac{P_n(a)}{Q_n(a)}$, où P_n et Q_n sont des polynômes vérifiant la relation $P_n + Q_n = (1+X)^n$. Expliciter ces polynômes.
3) Montrer que l'application th (tangente hyperbolique) réalise un isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(G,*)$.
4) Exploiter ces résultats pour calculer $\mathrm{th}(nx)$ en fonction de $\mathrm{th}x$.

Exercice 2

Soit G un groupe abélien fini. Soit $(a,b) \in G^2$

1. Montrer que $o(a^{-1}) = o(a)$.
2. Montrer que $o(a.b)$ divise $\mathrm{ppcm}(o(a), o(b))$.
3. Donner un exemple où $o(a.b) \neq \mathrm{ppcm}(o(a), o(b))$.
4. On suppose dans cett question que $Gr(a) \cap Gr(b) = \{e_G\}$.
   Montrer alors que dans ce cas, on a : $o(a.b) = \mathrm{ppcm}(o(a), o(b))$.
5. Soit $f : G \to G$ un morphisme de groupe.
   Montrer alors que $o(f(a))$ divise $o(a)$.
   Donner un exemple où $o(f(a)) \neq o(a)$.
6. On pose $o(a) = n$. Montrer que $\forall k \in N$, on a:

$$o(a^k) = \frac{n}{pgcd(k,n)}$$