Exercices : Evn

My Ismail Mamouni
http ://myismail.net
مُولَاي اسْمَاعِيل مَمُونِي

Niveau I : E3a, CNC & CCP

Partie I : les e3a

e3a2007

2) On suppose dans cette question que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension quelconque.

   a) Montrer que si h est une forme linéaire continue sur E alors le noyau, $\operatorname{Ker} h$, est fermé dans E.

   b) Montrer que si le noyau, $\operatorname{Ker} h$, de h est fermé alors h est continue. On pourra montrer que, si h n'est pas continue, alors il existe une suite $(t_n)_{n\geqslant 0}$ de E telle que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0. \\ h(t_n) = 1, \text{ pour tout entier } n. \end{cases}$$

   Puis, on utilisera la suite $(t_n - t_0)_{n\geqslant 0}$ pour mettre en évidence une contradiction.

   c) Montrer que si H est un hyperplan de E alors l'adhérence $\overline{H}$ de H est un sous-espace vectoriel de E.

   d) En déduire que tout hyperplan de E est fermé ou dense, c'est à dire $\overline{H} = H$ ou $\overline{H} = E$.

Partie III.

On suppose dans cette partie que E est un espace préhilbertien muni du produit scalaire : $\begin{array}{ccc} E\times E & \longmapsto & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (x|y) \end{array}$ et que H est un hyperplan dense de E, c'est à dire $\overline{H} = E$.

1) Déterminer $H^\perp$, l'orthogonal de H.
2) Que dire de $H \oplus H^\perp$?
3) Pour tout vecteur x de E, calculer la distance $d(x, H)$.
4) La distance $d(x, H)$ est-elle toujours atteinte ? Justifier.

Partie IV.

On suppose dans cette partie que H est un hyperplan fermé, d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E de dimension quelconque. H est le noyau de la forme linéaire h, continue non nulle sur E. x_0 désigne un vecteur fixé de E. On rappelle que la norme de l'application h subordonnée à la norme de E est définie par :

$$|||h||| = \sup_{x\neq 0} \frac{|h(x)|}{\|x\|}.$$

1) a) Montrer que, pour tout élément y de H on a :

$$\|x_0 - y\| \geqslant \frac{|h(x_0)|}{|||h|||}$$

b) En déduire que la distance de x_0 à l'hyperplan H est supérieure ou égale à $\dfrac{|h(x_0)|}{|||h|||}$.

c) Montrer que $d(x_0, H) = 0$ si et seulement si $x_0 \in H$.

d) On considère dans cette question $x_0 \notin H$.

α) Montrer qu'il existe une suite $(w_n)_{n \geqslant 0}$ d'éléments de $E \setminus \{0\}$ vérifiant :

$$|||h||| = \lim_{n \to +\infty} \frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|}.$$

β) Montrer que, pour tout entier n, il existe un réel λ_n non nul et un vecteur y_n de H tel que : $w_n = \lambda_n x_0 + y_n$.

γ) Prouver que, pour tout entier n :

$$\frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} \leqslant \frac{|h(x_0)|}{d(x_0, H)}.$$

e) En déduire que, pour tout vecteur x_0 de E, on a :

$$d(x_0, H) = \frac{|h(x_0)|}{|||h|||}.$$

2) Dans cette question, E est l'ensemble des suites réelles de limite nulle, on munit cet ensemble de la norme infinie, c'est à dire que si $u \in E$ alors $u = (u_n)_{n \geqslant 0}$ et $\|u\|_\infty = \sup |u_n|$, E est ainsi

Partie II : étude de normes matricielles

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans la suite, on note $||.||_\infty$ la norme usuelle sur $\mathbb{C}^n$ définie pour $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ par :

$$||(z_1, z_2, \dots, z_n)||_\infty = \max(|z_1|, |z_2|, \dots, |z_n|)$$

et on identifie le n-uplet $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ au vecteur colonne $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$. Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, on note $|||A|||_\infty$ la norme de A pour la norme subordonnée à la norme $||.||_\infty$. On rappelle que celle-ci est définie de la manière suivante :

$$|||A|||_\infty = \sup_{X \in \mathbb{C}^n, ||X||_\infty \leqslant 1} ||AX||_\infty$$

Enfin, pour $Z \in \mathbb{C}^n$ et $P \in M_n(\mathbb{C})$, on pose :

$$N_P(Z) = ||PZ||_\infty$$

1. Soit $D \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonale :

$$D = \begin{bmatrix} m_{1,1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & m_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & m_{n,n} \end{bmatrix}$$

   On pose $m = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |m_{i,i}|$.

   (a) Soit $Z \in \mathbb{C}^n$. Montrer que : $||DZ||_\infty \leqslant m||Z||_\infty$.

   (b) Déterminer $|||D|||_\infty$.

2. (a) Soit $P \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que N_P est une norme sur $\mathbb{C}^n$ si et seulement si P est une matrice inversible.

   Lorsque que P est inversible, on notera dorénavant $||.||_P$ pour N_P et la norme subordonnée à la norme $||.||_P$ sur $M_n(\mathbb{C})$ sera notée $|||.|||_P$.

   (b) On se donne une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$. Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, montrer que :

$$|||A|||_P = |||PAP^{-1}|||_\infty$$

3. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Pour $M \in M_n(\mathbb{C})$, on note $\text{sp}(M)$ l'ensemble des valeurs propres de M et on définit $\rho(M)$ par :

$$\rho(M) = \max\{|\mu|, \mu \in \text{sp}(M)\}$$

   (a) Montrer que pour toute matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$, on a : $\rho(A) = \rho(PAP^{-1})$.

   (b) Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\rho(A) \leqslant |||A|||_P$.

   (c) On suppose A diagonalisable. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $\rho(A) = |||A|||_P$.

   (d) Un exemple. Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Déterminer $\rho(A)$. Déterminer l'inverse P^{-1} d'une matrice $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telle que $|||A|||_P = \rho(A)$.

   (e) Un exemple. Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$ définie par $a_{i,j} = j$. Déterminer l'inverse P^{-1} d'une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $|||A|||_P = \rho(A)$.

Partie 2 : les CNC

CNC 2001

Ce résultat peut être admis et utilisé dans la suite

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, π_A son polynôme minimal. Montrer que $\deg(\pi_A) = n-1$ si et seulement s'il existe une matrice P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $a_0, \ldots, a_{n-2},\ \alpha$, éléments de $\mathbb{K}$, avec $\alpha^{n-1} = \sum\limits_{k=0}^{n-2} a_k \alpha^k$ tels que $P^{-1}AP$ soit de la forme (1).

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & a_{n-3} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Justifier que lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on peut choisir P dans $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \det M > 0\}$.

3ème Partie

Dans cette partie, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est muni de la norme $\|.\|$: $\quad A = (a_{i,j}) \mapsto \|A\| = \Big(\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$; $\mathrm{G}(\mathbb{K})$ désigne $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On se propose de montrer la connexité par arcs de l'ensemble

$$\boldsymbol{\mathcal{C}(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \deg(\pi_A) = n-1\}.}$$

1. (a) Montrer que l'application $\det :\ \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K},\ A \mapsto \det A$ est continue et que $\mathrm{G}(\mathbb{K})$ est un ouvert.
   (b) Montrer que si A et B sont des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.
   (c) Soit $(A, H) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\|H\| < \|A^{-1}\|^{-1}$. Montrer que $A+H$ est une matrice inversible et exprimer $(A+H)^{-1} - A^{-1}$ comme la somme d'une série.
   (*On pourra écrire* $A + H = A(I_n + A^{-1}H$.))
   (d) En déduire que l'application $\mathcal{I} :\ \mathrm{G}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ A \mapsto A^{-1}$ est continue.

2. (a) Soient A et B deux éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $T(x) = \det(xB + (1-x)A)$, $x \in \mathbb{C}$, est un polynôme en x, à coefficients complexes, et que T n'est pas le polynôme nul.
   (b) Soient $z_1, \ldots, z_p$ les racines de T et soit $r > 0$,
   soit $\phi :\ [0,1] \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \phi(t) = \gamma(t)B + (1-\gamma(t))A$ avec $\gamma(t) = \begin{cases} t(1+2ir) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}; \\ t + 2ir(1-t) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$
      i. Montrer que ϕ est continue et calculer $\phi(0)$ et $\phi(1)$.
      ii. Montrer que l'on peut choisir r tel que ϕ soit à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et conclure.
      (*Si* $I = \{i \in \{1, \ldots, p\}, \mathrm{Im}\, z_i > 0\}$ *n'est pas vide, choisir* $r < \min\{\mathrm{Im}\, z_i, i \in I\}$.)

3. On admet que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. J étant la matrice vue à la question A-7-c de la 2ème partie, montrer que l'ensemble $\{PJP^{-1}, P \in \mathrm{G}(\mathbb{K})\}$ est connexe par arcs.

4. Soit M une matrice de la forme (1) où $a_0, \ldots, a_{n-2}$ et α sont des éléments de $\mathbb{K}$ tels que $\alpha^{n-1} = \sum\limits_{k=0}^{n-2} a_k \alpha^k$. En remplaçant dans M les éléments $a_1, \ldots, a_{n-2}$ respectivement par $ta_1, \ldots, ta_{n-2}$, α par $t\alpha$ et a_0 par $\varepsilon(t) + a_0$, où $\varepsilon(t) = (t\alpha)^{n-1} - \sum\limits_{k=1}^{n-2} ta_k (t\alpha)^k - a_0$, montrer que l'on obtient une matrice $M(t) \in \mathcal{C}(\mathbb{K})$ et que l'application $\psi :\ [0,1] \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), t \mapsto M(t)$ est continue ; calculer $\psi(0)$ et $\psi(1)$.

5. Déduire de ce qui précède que $\mathcal{C}(\mathbb{K})$ est connexe par arcs.

On se propose de montrer dans cette question que l'ensemble des polynômes de degré p unitaires et scindés sur $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}_p[X]$.

Soit $P_n = X^p + a_{p-1}^{(n)} X^{p-1} + \cdots + a_1^{(n)} X + a_0^{(n)}$ une suite de polynômes unitaires de degré p scindés sur $\mathbb{R}$ qui converge vers un certain polynôme P

a Dire pourquoi P est de la forme $\sum_{i=0}^{p} a_i X^i$.

b Montrer que : $\lim_{n\to\infty} a_i^{(n)} = a_i$ pour tout $i \in [\![0, p]\!]$.

c Dire pourquoi $a_p = 1$.

d Pour tout entier naturel n, notons $Z_n = (z_1^{(n)}, \cdots, z_p^{(n)})$ une liste des zéros (supposés réels) du polynôme P_n pris dans un ordre arbitraire, mais bien sûr comptés avec leurs multiplicités.

Montrer que la suite (Z_n) admet une suite extraite $(Z_{\varphi(n)})$ convergente, de limite $Z = (z_1, \cdots, z_p)$.

e En déduire que $\prod_{i=1}^{p} (X - z_i)$.

On note $Rac(A)$ l'ensemble des racine carrées de A, c'est à dire
$$Rac(A) = \{R \in M_n(\mathbb{R}) / \ R^2 = A\}$$

• Partie II. Étude topologique de

Si A est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ qui a pour coefficients $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, on définit une norme en posant $N(A) = \max\limits_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|$. On munit $M_n(\mathbb{R})$ de cette norme N.

① **Fermeture de** $Rac(A)$.
Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $Rac(A)$ est une partie fermée de $M_n(\mathbb{R})$.

② Étude du caractère borné de $Rac(I_n)$.

a Un exemple instructif.

Pour tout entier naturel q, on pose $S_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & -1 \end{pmatrix}$. Calculer S_q^2. $Rac(I_2)$ est-elle une partie bornée de $M_2(\mathbb{R})$?

b $Rac(I_n)$ est-elle une partie bornée de $M_n(\mathbb{R})$ pour $n \geq$ $\|.3$?

c **Application** : pour cette question, $n \geq 2$.
Montrer qu'il n'existe pas de norme $\|.\|$ "surmultiplicative" sur $GL_n(\mathbb{R})$, c'est à dire vérifiant pour tous A et B dans $GL_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \geq \|A\|.\|B\|$.

• Partie III. Zéros de polynômes et intérieur de $Rac(A)$.

Soit p un entier naturel non nul. On munit $\mathbb{R}^p$ de la norme infinie $\|\|_\infty$.
On note Γ_p l'ensemble des **fonctions polynomiales** sur $\mathbb{R}^p$ c'est à dire : si $P \in \Gamma_p$, il existe N entier naturel et une famille de réels $\{a_{i_1,\ldots,i_p},\ 0 \leq i_1,\ldots,i_p \leq N\}$ tels que
$$\forall (x_1,\ldots,x_p) \in \mathbb{R}^p,\ P(x_1,\ldots,x_p) = \sum_{0\leq i_1,\ldots,i_p\leq N} a_{i_1,\ldots,i_p} x^{i_1}\ldots x^{i_p}$$
Par exemple si $p = 3$, $P(x_1,x_2,x_3) = 5x_1^2 + 3x_1x_2x_3 + 4x_2^5$ est une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^3$.
Si $p = 1$, Γ_1 est l'ensemble des fonctions polynômes se $\mathbb{R}$.
Enfin, si $p \in \Gamma_p$, on pose $Z(P) = \{(x_1,\ldots,x_p) \in \mathbb{R}^p / \ P(x_1,\ldots,x_p) = 0\}$
($Z(P)$ est **l'ensemble des zéros de la fonction polynomiale** P).

L'objectif de cette partie est d'étudier l'intérieur de $Z(P)$, afin de déterminer l'intérieur de $Rac(A)$.

On rappelle que si Ω est une partie de $\mathbb{R}^p$, un vecteur a de $\mathbb{R}^p$ est un point intérieur à Ω s'il existe un nombre réel r strictement positif tel que $B_\infty(a,r) \subset \Omega$ et que l'intérieur d'une partie est l'ensemble de ses points intérieurs.

① **Questions préliminaires** :

a Soit $a = (a_1,\ldots,a_p) \in \mathbb{R}^p$ et $r > 0$. Montrer que $B_\infty(a,r)$ peut s'écrire comme produit de p intervalles.

b Soient F et G deux parties de $\mathbb{R}^p$. On suppose que F et G sont d'intérieur vide, montrer que $F \cap G$ est encore d'intérieur vide.

② **Exemples d'ensembles de zéros de fonctions polynomiales.** **a** Dans cette question, $p = 1$. Soit P une fonction polynôme sur $\mathbb{R}$. Dans quel cas $Z(P)$ est-il infini ? Justifier votre réponse.

b Dans cette question, $p = 2$. On considère $P(x_1,x_2) =$

$2x_1 - x_2 - 1$ et $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2$. Représenter graphiquement dans le plan $\mathbb{R}^2$ les ensembles $Z(P)$ et $Z(Q)$. $Z(P)$ et $Z(Q)$ sont-il infinis ?

③ **Intérieur de l'ensemble des zéros d'une fonction polynomiale.**

Soit $P \in \Gamma_p$.

a Soient $I_1, \dots, I_p$ des parties infinies de $\mathbb{R}$. Montrer par récurrence que si la fonction polynomiale P s'annule sur $I_1 \times \cdots \times I_p$, alors P est la fonction nulle.

b En déduire que si P s'annule sur une partie d'intérieur non vide, P est la fonction nulle.

c Si l'on suppose que P n'est pas la fonction nulle, que vaut l'intérieur de $Z(P)$?

④ **Application à l'étude de l'intérieur de** $Rac(A)$.

Dans cette question, on confondra les espaces vectoriels $M_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^{n^2}$. Par exemple, on prendra la liberté d'écrire que pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{R}^{n^2}$, sans se soucier de l'ordre des termes.

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$.

a Ecrire $Rac(A)$ sous forme d'un ensemble de $\mathbb{R}^{n^2}$ puis montrer qu'il existe des éléments $P_1, \dots, P_{n^2}$ de Γ_{n^2} tels que

$$Rac(A) = \bigcap_{l=1}^{n^2} Z(P_l).$$

b Déterminer l'intérieur de $Rac(A)$.