My Ismail Mamouni
http ://myismail.net
مموني مولاي اسماعيل

EXERCICES

ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

Elementary Level

Mathmaticien du jour — *Gram*

Jorgen Pedersen Gram (1850-1916) est un actuaire et mathématicien danois, trés connu à l'aide procèdé de Gram-Shmidt. Son nom est aussi lié aux travaux sur la fameuse fonction zéta de Riemann.
Gram était le premier mathématicien à une théorie systématique pour l'étude des courbes de fréquence obliques, prouvant que la courbe gaussienne symétrique normale était juste un cas spécial d'une classe plus générale des courbes de fréquence. Il est mort après avoir été heurté en une bicyclette.

Exo 1

E désigne un espace euclidien de dimension n.

Soit $f : E \to E$ une application non nécéssairement linéaire.

1) On suppose que f conserve le produit scalaire.
Démontrer que f est linéaire.

2) On suppose que f conserve les distances.
Démontrer que $f = f(0_E) + g$, avec $g \in \mathcal{O}(E)$.

Exo 2

Soit E espace vectoriel euclidien, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'élèments E , tous unitaires telle que :

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{x} | \overrightarrow{e_i})^2 \qquad \forall x \in E$$

Montrer que c'est une base orthonormée de E.

Exo 3

Étude de projections.

1) Caractrisation des projections orthogonales.
Soit E un espace vectoriel euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ une projection.
Montrer que :
p est une projection orthogonale $\Longleftrightarrow \forall\ \vec{x} \in E,\ \|p(\vec{x})\| \leq \|\vec{x}\|$.

2) Composition de projecteurs.
Soient F, G deux sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien E tels que $F^\perp \perp G^\perp$. On note p_F et p_G les projections orthogonales sur F et sur G. Montrer que $p_F + p_G - p_{F \cap G} = \mathrm{id}_E$ et $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F = p_{F \cap G}$.

3) Soit E un espace vectoriel euclidien et p, q deux projections orthogonales.

a) Montrer que p et q commutent si et seulement si $(\mathrm{Im}\ p \cap \mathrm{Im}\ q)^\perp \cap \mathrm{Im}\ p$ et $(\mathrm{Im}\ p \cap \mathrm{Im}\ q)^\perp \cap \mathrm{Im}\ q$ sont orthogonaux.

b) Montrer que : $p \circ q = 0 \Longleftrightarrow q \circ p = 0$.

c) Montrer que : $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(q) \Longleftrightarrow$ Pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|q(x)\|$.

Exo 4

Distance à un sous-espace vectoriel

1) Pour $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note : $f_A : \left\{\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ S=(s_{ij}) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-s_{ij})^2\end{array}\right.$.

Déterminer le minimum de f_A sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, et la matrice S réalisant ce minimum.

2) Soient $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&0&1\\1&1&1\\3&2&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$.

Calculer $\displaystyle\min_{X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\|AX-B\|$ et déterminer les X réalisant ce minimum ($\|\ \|$ désigne la norme euclidienne canonique dans $\mathbb{R}^4$).

3) Calculer $\inf\left\{\displaystyle\int_0^1 t^2(\ln t-at-b)^2\,\mathrm{d}t,\,(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

Exo 5

1) ***Décomposition** QR* **: Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale, P, et une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs, T, uniques telles que $M=PT$.**

2) ***Inégalité de Hadamard* : Soit E un espace vectoriel euclidien, $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ une base orthonormée, et $\mathcal{C}=(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)$ des vecteurs quelconques.**
Démontrer que $|\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})|\le\prod_j\|\vec{u}_j\|$. Étudier les cas d'galité.

Exo 6

. Théorème de Hanh-Banach.
Soit E un espace préhilbertien réel

1) **Soit $x_0\in E$ tel que $x_0\neq 0_E$, montrer qu'il existe $\varphi\in E^*$ tel que $\varphi(x_0)\neq 0$.**
***Indication* : Écrire $E=\mathbb{R}x_0\oplus H$ où H hyperplan.**
2) **Soit $x,y\in E$ tel que $x\neq y$, montrer qu'il existe $\varphi\in E^*$ tel que $\varphi(x)\neq\varphi(y)$.**

Exo 7

. Décomposition de Cholesky.
Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive.

1) **Montrer qu'il existe une matrice T triangulaire supérieure telle que $A={}^tTT$. Montrer que T est unique si on impose la condition : $\forall\ i,\ T_{ii}>0$.**
2) **Application : Montrer que $\det A\le\displaystyle\prod_{i=1}^{n}a_{ii}$.**

Exo 8

. Quotients de Rayleigh .
Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ auto-adjoint, on se propose d'étudier les extremum du quotient de Rayleigh $R_f(x)=\dfrac{(f(\vec{x})\mid\vec{x})}{\|\vec{x}\|}$ où $x\neq 0_E$. Soit $\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n$ les valeurs propres de f.

1) **Montrer que : $\forall\ \vec{x}\in E,\ \lambda_1\|\vec{x}\|^2\le(f(\vec{x})\mid\vec{x})\le\lambda_n\|\vec{x}\|^2$.**
2) **Montrer que si l'une de ces deux ingalités est une égalité pour un vecteur $\vec{x}\neq\vec{0}$, alors $\vec{x}$ est vecteur propre de f.**
3) **Soit $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ une base orthonormée de E telle que pour tout i : $(f(\vec{e}_i)\mid\vec{e}_i)=\lambda_i$. Montrer que : $\forall\ i,\ f(\vec{e}_i)=\lambda_i\vec{e}_i$.**
4) **En déduire que le quotient de Rayleigh de f atteint ses extremums, préciser ces extremums et en quels vecteurs ils sont atteints.**

Exo 9 . *Quelques propriétés des endomorphismes auto-adjoints.*

1) *Autoadjoint $\Longrightarrow$ linéaire.*
   Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel euclidien et u: E--> E telle que : $\forall\ \vec{x},\vec{y}\in E,\ \ (u(\vec{x})\mid\vec{y})=(\vec{x}\mid u(\vec{y}))$. Montrer que u est linéaire.
2) *Composée auto-adjointe :* Soient $u,v\in\mathcal{L}(E)$ auto-adjoints. Montrer que $u\circ v$ est auto-adjoint si et seulement si $u\circ v=v\circ u$.
3) *Composée de projecteurs :*
   Soient p,q deux projecteurs orthogonaux.
   a) Montrer que $p\circ q\circ p$ est auto-adjoint.
   b) Montrer que $(\text{Im } p+\ker q)\overset{\perp}{\oplus}(\ker p\cap\text{Im } q)=E$.
   c) En déduire que $p\circ q$ est diagonalisable.
4) *Endomorphisme auto-adjoint et orthogonal :*
   Quels sont les endomorphismes de E la fois auto-adjoints et orthogonaux ?

Exo 10 . *Théorème de Courant-Fisher*
Soit E un espace vectoriel euclidien.

1) Soit $v\in S(E)$, (i.e : auto-adjoint) tel que $\left(\overrightarrow{v(x)}|\overrightarrow{x}\right)=0$ pour tout x. Montrer que $v=0$.
2) Soient $u_1,\dots,u_p\in S(E)$. On suppose que $rg(u_1)+\cdots+rg(u_p)=n$, et que $\forall x\in E$, $\left(\overrightarrow{u_1(x)}|\overrightarrow{x}\right)+\cdots+\left(\overrightarrow{u_p(x)}|\overrightarrow{x}\right)=(\overrightarrow{x}\,|\,\overrightarrow{x})$.
   a) Montrer que $u_1+\cdots+u_p=Id_E$.
   b) Montrer que $E=Im(u_1)\oplus\cdots\oplus Im(u_p)$.
   c) Montrer que pour tout i, u_i est la projection orthogonale sur $Im(u_i)$.

Exo 11 . *Endomorphismes normaux.*
Soit E un espace vectoriel hermitien. Un endomorphisme $u\in\mathcal{L}(E)$ est dit normal si u et u^* commutent.

1) Soit u normal, montrer que si F est un sous-espace propre de u alors $F^\perp$ est stable par u.
   En déduire que u est diagonalisable dans base orthonormale.
   La réciproque est-elle vraie ?
2) Soit $u\in\mathcal{L}(E)$. Montrer l'quivalence entre les propriétés suivantes :
   (1) u est normal.
   (2) $\forall\ x\in E, \|u(x)\|=\|u^*(x)\|$.
   (3) Tout sous-espace vectoriel stable par u est stable par u^*.
   (4) Si un sous-espace vectoriel F est stable par u alors $F^\perp$ est stable par u.
   (5) Il existe $P\in\mathbb{C}[X]$ tel que $u^*=P(u)$.
3) Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que $f\circ f^*=f^*\circ f$ et $f^2=-\text{id}$. Montrer que f est orthogonal.
4) Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de valeurs propres $\lambda_1,\dots,\lambda_n$. Montrer que $AA^*=A^*A\iff\text{tr}(AA^*)=|\lambda_1|^2+\cdots+|\lambda_n|^2$.

Exo 12 . *evn $\Longrightarrow$ prèhilbertien ?*

Il est bien connu que si E est un espace prèhilbertien muni de la norme $\|.\|$, alors l'identit de la médiane (ou du parallèlogramme) est vérifiée, à savoir : pour tous x, y de E, on a : $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$. L'objectif de cet exercice est de montrer une sorte de réciproque de cette propriété, à savoir le résultat suivant : si E est un espace vectoriel normé réel dont la norme vérifie l'identit de la médiane, alors E est nécessairement un espace prèhilbertien (c'est à dire qu'il existe un produit scalaire $(.,.)$ sur E tel que pour tout x de E, on a $(x,x) = \|x\|^2$. Il s'agit donc de construire un produit scalaire, et compte tenu des formules de polarisation, on pose : $(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right)$. Il reste vérifier que l'on a bien défini ainsi un produit scalaire.

1) Montrer que pour tout x, y de E, on a $(x,y) = (y,x)$ et $(x,x) = \|x\|^2$.
2) Montrer que pour $x_1,\ x_2,\ y \in E$, on a $(x_1+x_2, y) - (x_1, y) - (x_2, y) = 0$
   (on utilisera l'identité de la médiane avec les paires (x_1+y, x_2+y) et (x_1-y, x_2-y)).
3) Montrer, en utilisant la question précèdente, que si $x, y \in E$ et $r \in \mathbb{Q}$, on a : $(rx, y) = r(x,y)$.
4) En utilisant un argument de continuité, montrer que c'est encore vrai pour $r \in \mathbb{R}$.
5) Conclure !

Exo 13 . *Décomposition polaire*

Soit E un espace vectoriel euclidien. Un endomorphisme symétrique $u \in S(E)$ est dit ***positif*** si pour tout x de E, $(u(x), x) \geq 0$. Il est dit ***défini positif*** si pour tout x de E non nul, $(u(x), x) > 0$. On notera $S^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs, et $S^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques définis positifs.

1) Soit $u \in S(E)$. Montrer que u appartient $S^+(E)$ si et seulement si ses valeurs propres sont positives ou nulles. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de $u \in S(E)$ pour que $u \in S^{++}(E)$.
2) Soit $u \in S^+(E)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ses valeurs propres (distinctes), et $E_i = \ker(u - \lambda_i Id_E)$. On dfinit v_i par $v_i(x) = \sqrt{\lambda_i} x$ si $x \in E_i$, et $v_i(x) = 0$ si $x \in E_i^{\perp}$. On note enfin $v = v_1 + \cdots + v_p$. Justifier que $v^2 = v \circ v = u$, et que v est positif.
3) Soit w un autre lment de $S^+(E)$ tel que $w^2 = u$.
   a) Montrer que $wu = uw$.
   b) En déduire que $w(E_i) \subset E_i$.
   c) Soit w_i l'endomorphisme induit par w sur E_i. Vérifier que w_i est syémtrique positif, puis diagonaliser w_i.
   d) En dduire que $w = v$.
4) Soit $f \in Gl(E)$.
   a) Montrer que $f^* \circ f \in S^{++}(E)$.
   b) Montrer qu'il existe un unique couple $(h, g) \in O(E) \times S^{++}(E)$ tel que $f = h \circ g$. Cette factorisation s'appelle *décomposition polaire* de f.