RÉSEAU CPGE IBNGHAZI

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

MP* 1 (Rabat)
Groupe 2

Feuille d'Exercices : Réduction

Basic Level

Partie A : Les Must To Know

Exo 1 Soit E un IK-espace vectoriel, u un endomorphisme de E, et F un sous-espace vectoriel de E stable par u.

a) Montrer que le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit divise celui de u

b) Montrer que tout polynôme annulateur de u est aussi annulateur pour l'endormphisme induit.

c) Montrer que le polynôme minimal de l'endomorphisme induit divise celui de u

e) Montrer que l'endomrohisme est diagonalisable (resp. trigonalisable), alors l'endomorphisme. induit l'est aussi

f) Etudier la réciproque de la question précédente.

Exo 2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{rg} A = 1$.
Etablir A diagonalisable si, et seulement si, $\mathrm{tr} A \neq 0$

Exo 3 Soient $A_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $A_2 \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, A_1 et A_2 le sont.

Exo 4 1) Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie non nulle
Montrer qu'il existe une droite vectorielle ou un plan vectoriel stable par u.

2) En déduire le lemme de Schur : Tout endomorphisme qui commute avec tous les autres endormphismes est une homothétie

Exo 5 Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tel que tout vecteur non nul en soit vecteur propre. Montrer que u est une homothétie vectorielle.

Exo 6 Montrer que tout en endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simples est cyclique.

Exo 7 1) Expliquer brièvement pourquoi ${}^t\mathrm{com}(A)A = \det(A)I_n$

2) On suppose que A admet n valeurs propres distinctes ; que vaut $\det(A)$?

i) Que représente un vecteur propre de A pour ${}^t\mathrm{com}(A)$?

ii)On suppose de plus que A n'est pas inversible. Déterminer $\dim\ker {}^t\mathrm{com} A$

Prouver que ${}^t\mathrm{com} A$ n'admet que deux valeurs propres, les expliciter.

iii) Etudier le cas où A est inversible

Partie B : Les Must To Do

Exo 8

Soient $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P_n(x) = \det(A_n - xI_n)$

a) Montrer $P_n(x) = -xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$

Calculer $P_1(x)$ et $P_2(x)$.

b) Pour tout $x \in]-2, 2[$, on pose $x = -2\cos\alpha$ avec $\alpha \in]0, \pi[$. Montrerque

$$P_n(x) = \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin\alpha}$$

c) En déduire que $P_n(x)$ admet n racines puis que A_n est diagonalisable.

Quelle est la dimension des sous-espaces propres de A_n ?

c) Déterminer les sous-espaces propres de A_n

Indice : on pourra, pour λ valeur propre de A_n, chercher $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ vérifiant $AX = \lambda X$ et poser $x_0 = x_{n+1} = 0$.

e) Diagonaliser la matrice A_n

Exo 9

Soient f, g endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.
On suppose que f est diagonalisable. Montrer :

$$f \circ g = g \circ f \Leftrightarrow \text{ chaque sous-espace propre de } f \text{ est stable par } g$$

Exo 10

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie vérifiant :

« Tout sous-espace vectoriel stable par f admet un supplémentaire stable »

Montrer que l'endomorphisme f est diagonalisable.

Exo 11

Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n.
On note $\mathcal{C}_f$ l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f.
a) Montrer que $\mathcal{C}_f$ est une sous algèbre de $\mathcal{L}(E)$.
b) Montrer qu'un endomorphisme g appartient à $\mathcal{C}_f$ si, et seulement si, chaque sous-espace propre de f est stable par g.
c) En déduire que

$$\dim \mathcal{C}_f = \sum_{\lambda \in Sp(f)} \alpha_\lambda^2$$

où α_λ est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ.
d) On suppose que les valeurs propres de f sont simples. Montrer que $(\mathrm{Id}, f, \dots, f^{n-1})$ est une base de $\mathcal{C}_f$.

Exo 12

1) Montrer le Lemme (matrice à diagonale dominante) :

Soit $A\in M_n(\mathbb{C})$, on suppose que $\forall i\in[\![1,n]\!], |A_{i,i}|>\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|A_{i,j}|$.

Alors A est inversible.

2) En dèduire le (Théorème de localisation) :

Soit A une matrice complexe, et $(A_{i,j})_{\substack{i\leq n\\j\leq n}}$ ses coefficients.

Alors $\mathrm{sp}(A)\subset\bigcup_{i=1}^{n}\overline{D}(A_{i,i},\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|A_{i,j}|)$. ($\overline{D}(z,r)=\{x\in\mathbb{C},|x-z|\leq r\}$)

Exo 13

Projecteurs spectraux d'un endomorphisme diagonalisable

Définition :

Soit $u\in L_{\mathbb{K}}(E)$, diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1,..\lambda_p$ deux à deux distinctes. On note $F_i=\ker(u-\lambda_i\mathrm{Id})$. On appelle i-ème projecteur spectral de u le projecteur sur F_i parallèlement à $G_i=\bigoplus_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{p}F_j$. on le note π_i

1) Montrer les propriétés suivantes

i) $\pi_1+...+\pi_p=\mathrm{Id}_E$ et $\forall i\neq j,\pi_i\circ\pi_j=0$

ii) $u=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\pi_j$ Plus généralement : $\forall m\in\mathbb{N},u^m=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j^m\pi_j$,

Et pour tout $P=a_0+...+a_dX^d\in\mathbb{K}[X]$, on a : $\widetilde{P}(u)=\sum_{j=1}^{p}P(\lambda_j)\pi_j$

2) Calcul des π_j : Si on note $P_{i_0}=\prod_{j\neq i_0}\frac{X-\lambda_{i_0}}{\lambda_j-\lambda_{i_0}}$, Montrer qu' on a alors $\widetilde{P}_{i_0}(A)=\pi_{i_0}$

3) Inversement, s'il existe des projecteurs $\pi_i,i=1..p$ vérifiant :

$$\sum_{j=1}^{p}\pi_j=\mathrm{Id}_E,\ \forall i\neq j,\pi_i\circ\pi_j=0 \text{ et } u=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\pi_j ,$$

i) Montrer alors que u est diagonalisable, et ses valeurs propres sont les $\lambda_i,i\in[\![1,p]\!]$.

ii) Si de plus les λ_i sont deux à deux distincts, les projecteurs spectraux de u sont les $\pi_i,i\in[\![1,p]\!]$.

Exo 14

Les sous espaces caratéristique

Définition :

Le sous-espace $C_i=\ker((u-\lambda_i\mathrm{Id})^{m_i})$ s'appelle sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ_i.

Montrer les propriétés suivantes

- Si χ_u est scindé, E est la somme directe des sous-espaces caractéristiques.
- Pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, $\dim C_i=m_i$
- Pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, $\ker(u-\lambda_i\mathrm{Id})\subset C_i$, avec égalité si et seulement si $\dim E_{\lambda_i}=m_i$

Partie D : Les Applications

Exo 19 Système différentiel. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Soit $U_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et (U_n) dfini par la relation : $U_{n+1} = AU_n$. Calculer U_n en fonction de n.

c. Soit $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Résoudre $X'(t) = AX(t)$.

Exo 20 Calcul des puissances de A.

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant pour valeurs propres $1, -2, 2$ et $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que A^n peut s'écrire sous la forme : $A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A + \gamma_n I_3$ avec $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in \mathbb{R}$.

b. On considère le polynôme $P(X) = \alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n$. Montrer que : $P(1) = 1$, $P(2) = 2^n$, $P(-2) = (-2)^n$.

c. En déduire les coefficients $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$.

Exo 21 Suites récurrentes linaires.

Soit (u_n) une suite réelle vérifiant l'équation de récurrence : $u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$.

a. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.

b. Diagonaliser A. En déduire u_n en fonction de u_0, u_1, u_2 et n.

Exo 22 Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites de nombres réels satisfaisant aux relations de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n - x_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n - y_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n - z_n \end{cases}$$

Calculer les valeurs de x_n, y_n et z_n en fonction de x_0, y_0 et z_0.

Exo 23 Proposer une méthode pour résoudre toute équation différentielle d'ordre n, à coéfficients constants

NB. La mèthode proposée doit faire appel à la réduction de matrices