My Ismail Mamouni
http ://myismail.net
مُوني مُولاي اسماعيل

Séries numériques

Partie I : Les Must To Know

Exo 1 Transformation d'Abel

Soit (a_n) et (b_n) deux suites numériques tq (b_n) décroissante vers 0 et il existe M>0 tel que

$$|S_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leq M \text{ pour tout entier } n$$

1. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k-1}) S_k - b_n S_n$
   Indication clé : $a_k = S_k - S_{k-1}$ pour $k \geq 1$
2. Montrer que la série $\sum (b_k - b_{k-1}) S_k$ converge absolument
3. En déduire que $\sum_{k\geq 0} a_k b_k$ converge
4. **Application 1 : Critère Spécial de Séries Alérnées (Critère de Leibniz)**
   Soit (ε_n) une suites numériques telle que q (ε_n) décroissante vers 0.
   Montrer que $\sum (-1)^k \varepsilon_k$ converge
5. **Application 1 : Série de Dirichlet**
   5.1. Montrer que la série $\sum_k e^{ik\theta} / k$ converge pour tout $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$
   5.2. Vérifier que la série $\sum_k e^{ik\theta} / k$ semi-converge où $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$
   5.3. En déduire que $\sum_k \cos(k\theta)/k$ et $\sum_k \sin(k\theta)/k$ sont semi-convergentes.

Exo 2 Règle de Raabe-Duhamel

Soit (u_n) suite numérique telle que $u_{n+1} / u_n = 1 - \alpha / n + O(1/n^\beta)$ tel que $\beta>1$.

1. On suppose $\alpha>1$. On pose $v_n = n^\alpha u_n$
   1. Donner un DL de $\ln(v_{n+1} / v_n)$
   2. En déduire que la série $\sum_n \ln(v_{n+1} / v_n)$ converge.
   3. En déduire que la suite (v_n) converge vers une limite L finie non nulle.
   4. En déduire que la série $\sum_n u_n$ un converge.
2. On suppose $\alpha<1$. Montrer que la série $\sum_n u_n$ diverge.
3. $\alpha=1$
   1. Donner un exemple où $\alpha=1$ et $\Sigma n\, u_n$ converge
   2. Donner un exemple où $\alpha=1$ et $\Sigma n\, u_n$ diverge
   3. Conclure
4. Donner une conclusion générale

Exo 3 — La Constante γ d'Euler

1. Montrer que $\ln(n+1) - \ln(n) < 1/n$.
2. En déduire que $H_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$ diverge.
3. Rappeler l'inégalité de comparaison séries intégrales.
4. En déduire que $H_n \sim \ln n$
5. Montrer que $(H_n - \ln n)$ est une suite décroissante minorée
6. En déduire que $(H_n - \ln n)$ converge
   On pose $\lim (H_n - \ln n) = \gamma$ (appelée constante gamma d'Euler)
7. En déduire $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$
8. Montrer que $H_n - \ln n - \gamma = \sum_{k=n+1}^{\infty} [\ln (k/k-1) - 1/k]$
9. En déduire que $H_n = \ln n + \gamma + 1/2n + o(1/n)$

Exo 4 — Le Produit de Cauchy

Soit E une algèbre normée de Banach. Soit (a_n) et (b_n) deux suites à valeurs dans E.

1. Rappeler la formule de leur produit de Cauchy.
2. Énoncer le théorème fondamental en relation avec le produit de Cauchy.
3. On pose $a_n = b_n = (-1)^n / n^{1/2}$

   3.1. Justifier que $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ sont semi-convergente.

   3.2. Exprimer le produit de Cauchy $a_n * b_n$ sous forme d'une somme de Riemann.

   3.3. En déduire que $\lim a_n * b_n \neq 0$.

   3.4. Conclure.

Exo 5 — Les fonctions Dzêta et Êta de Riemann.

On note ζ la fonction de la variable réelle x définie par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

1. Montrer que $\xi(x)$ converge si et seulement si $x>1$.
2.

3) Étude aux bornes.

a) **i)** Soit $x \in D_\zeta$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Montrer : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}$.

ii) En déduire, que pour tout $x \in D_\zeta$,

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}.$$

3. En déduire que $\lim \xi(x) = 1$ quand $x \to +\infty$ et que $\lim \xi(x) = +\infty$ quand $x \to 1^+$
4. Justifier que $\xi(x) \sim 1/(x-1)$ quand $x \to 1^+$
5. La fonction êta de Riemann est définie par la formule

$$\forall x \in]0;\ +\infty[, \qquad F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

   5.1. Montrer que cette série converge pour tout $x>0$.

   Montrer que :

$$\forall x \in]1,\ +\infty[, \qquad \zeta(x) - F(x) = 2^{1-x}\zeta(x)$$

   5.2. Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$1 - \frac{1}{2^x} \leqslant F(x) \leqslant 1 - \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x}$$

Exo 6

Comparaisons séries-intégrales

1. Déterminez en fonction de $\beta \in \mathbf{R}$ la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln^{\beta}(n)}$.

2. Montrez que la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta}(n)}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

3. Étudiez en fonction de α la nature de la série $\sum \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n^{\alpha}}$.

4. Équivalents des sommes partielles et des restes pour une série de Riemann

Soit $\alpha > 0$. On pose pour $n \in \mathbf{N}^{\star}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}}$ et si $\alpha > 1$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$.

1. On suppose que $0 < \alpha < 1$. Déterminez un équivalent de S_n.
2. On suppose que $\alpha > 1$. Déterminez un équivalent de R_n.

5. Déterminez la nature des séries $\sum_{n\geq 1} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{1+2+\cdots+n}$, et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})$.

6. Établir la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^{\star}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}^{\star},\ u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$$

Exo 7

Étudier la nature de la série de terme général.
Calculer sa somme (dans le cas possible)

1) $u_n = \ln(1 + \frac{2}{n(n+3)})$

2) $u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n\sqrt{n}}$.

3) $u_n = \frac{(-1)^n}{(\ln n)^{\alpha} + (-1)^n}$, *où* α *un nombre réel,*

4) $u_n = \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$

5) $u_n = \frac{\sqrt{n}\ln(n)}{n^2+1}\sin(n\theta)$ *où* $\theta \in \mathbb{R}$ *est fixe.*

6) $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ *où* $\alpha > 1$.

7) $u_n = \sin(\sqrt{n^2+a^2}\pi)$ *avec* a *un réel positif donné.*

8) $u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}}dx$.

9) $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}+(-1)^n n^{\beta}}$. *où* α, β *deux nombres réels tels que* $\alpha \neq \beta$.

10) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sin(n) + \sqrt{n}}$.

11) $u_n = \ln(\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+a}})$, *où* a *réel positif.*

12) $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$

13) $u_n = e^{-\sqrt{n}}$

14) $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha} + (-1)^n}$