Structure de groupe

vocabulaire

Soit G un groupe , pour tout $a \in G$, H, K des sous groupes de G on pose :

— aH l'ensemble des éléments de G qui s'écrivent sous la forme $a.h$ où $h \in H$

— Ha l'ensemble des éléments de G qui s'écrivent sous la forme $h.a$ où $h \in H$

— HK l'ensemble des éléments de G qui s'écrivent sous la forme $h.k$ où $h, k \in H \times K$

Exercice1

1. Montrer que aHa^{-1} est sous-groupe de G
2. Montrer que : aH sous groupe de $G \iff a \in H$
3. Montrer que Ha sous groupe de $G \iff a \in H$
4. Montrer que HK sous groupe de $G \iff HK = KH$
   Indication : Montrer d'abord que $x \in HK \Leftrightarrow x^{-1} \in KH$.

Exercice2

Transfert de structure.

Soit $(G, .)$ un groupe, E un ensemble, et $\phi : G \to E$ une bijection. On définit une opération $\star$ sur E par :

$$\forall\, x, y \in E,\ x \star y = \phi\Big(\phi^{-1}(x)\phi^{-1}(y)\Big).$$

Montrer que $\star$ est une loi de groupe et que les groupes G et E sont isomorphes via ϕ.

Exercice3

Translations surjectives.

Soit G un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne $\cdot$ associative telle que :

$$\forall\, a, b \in G,\ \exists\, x, y \in G \text{ tel que } : a = x \cdot b = b \cdot y.$$

Montrer que $(G, \cdot)$ est un groupe.

Exercice4

Soit E ensemble fini non vide muni d'une LCI associative et commutative.

1. On suppose que tous ses éléments sont réguliers, montrer que c'est un groupe.

   Indication : Pour $a \in E$, fixé, étudier l'injection et surjection de l'application $\varphi_a :: \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & a.x \end{array}$
2. On suppose que $\forall (x, y) \in E^2 \quad \exists! a \in E$ tel que $y = a.x$, montrer que c'est un groupe.
3. Reprendre les questions précédentes on supposant cette fois que la LCI est seulement associative.

Exercice5

Soit G un groupe multiplicatif et H une partie finie de G non vide, stable par multiplication. Montrer que H est un sous-groupe de G.

Exercice6

Soit $(G,.)$ un groupe fini et H, K deux sous-groupes de G.

On considère l'application $H \times K$ muni de la loi . définie par $(a,b).(c,d) = (a.b, c.d)$ est un groupe. $\phi :: \begin{array}{ccc} H \times K & \to & G \\ (h,k) & \mapsto & h.k \end{array}$

1. Montrer que $(H \times K, .)$ est un groupe.
2. Est-ce que ϕ est un morphisme de groupes ?
3. Soit $z \in HK$, $z = h_0.k_0$ avec $h_0 \in H$ et $k_0 \in K$.
   Montrer que les antécédents de z par ϕ sont les couples $(h_0.t, t^{-1}.k_0)$ avec $t \in H \cap K$.
4. En déduire que : $\mathrm{card}(HK)\mathrm{card}(H \cap K) = \mathrm{card}(H)\mathrm{card}(K)$.

Exercice7:Centralisateur

Soient G un groupe, S une partie de G et $H \leq G$. On note

$$Z_H(S) = \{g \in H \mid \forall s \in S,\ sg = gs\}.$$

1) Montrer que $Z_H(S)$ est un sous-groupe de H.

2) On suppose $S \subset T$. Comparer $Z_H(S)$ et $Z_H(T)$.

3) On suppose $H' \leq H$. Comparer $Z_{H'}(S)$ et $Z_H(S)$.

4) En déduire que $Z_H(S) = Z_G(S) \cap H$.

5) On note $Z(G)$ plutôt que $Z_G(G)$. On dit que c'est le *centre de* G. à quelle condition a-t-on $Z(G) = G$?

6) Montrer que $Z(G)$ est distingué dans G et que tout sous-groupe de $Z(G)$ est distingué dans G.

7) Relier $Z(G)$ au noyau du morphisme de groupes

$$\begin{aligned} \mathrm{Int}\colon G &\longrightarrow \mathrm{Aut}(G) \\ g &\longmapsto (c_g : x \mapsto gxg^{-1}). \end{aligned}$$

8) Calculer le centre d'un groupe d'ordre pq non abélien (où p et q sont deux nombres premiers distincts, voir 2).

9) Soient G et H deux groupes. Calculer $Z(G \times H)$.

10) Calculer $Z(\mathfrak{S}(X))$, $Z(\mathfrak{A}(X))$, $Z(GL(V))$, $Z(SL(V))$, $Z(B)$ où B désigne le groupe des matrices triangulaires inversibles.

11) Si V est un espace vectoriel euclidien, calculer $Z(O(V))$, $Z(SO(V))$.

Exercice 8 : Groupe dérivé

Soit G un groupe. Pour $x, y \in G$, on note $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ le *commutateur* de x et y et on définit $D(G)$ (parfois noté $[G, G]$) le sous-groupe engendré par les commutateurs.

1) Montrer que tout élément de $D(G)$ est un produit de commutateurs.

2) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $D(G) = 1$.

3) Soient G, H deux groupes et $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes. Montrer que φ induit un morphisme de groupes de $D(G)$ dans $D(H)$ (surjectif (resp. injectif, bijectif) si φ l'est).

4) En déduire que $D(G)$ est un sous-groupe caractéristique de G et donc un sous-groupe distingué de G.

5) Déduire de la question c que si tout morphisme de groupes $\varphi : G \to H$ induit un morphisme de groupes $\widetilde{\varphi} : G/D(G) \to H/D(H)$ (surjectif (resp. bijectif) si φ l'est). Donner un exemple où φ est injectif et $\widetilde{\varphi}$ ne l'est pas.

6) Montrer que si H est commutatif et $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes alors $D(G) \subset \ker \varphi$.

7) Montrer que $G/D(G)$ est commutatif et que tout sous-groupe de G contenant $D(G)$ est un sous-groupe distingué de G.

8) Soit A un groupe abélien. Montrer que tout morphisme de groupes de G dans A se factorise de façon unique par la surjection canonique $\pi : G \to G/D(G)$.

9) En déduire que

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.}}(G/D(G), A) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.}}(G, A) \\ \varphi &\longmapsto \varphi \circ \pi \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes (au fait, c'est quoi la structure de groupes sur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.}}(G, A)$ et si A n'est pas commutatif, est-ce que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.}}(G, A)$ est un groupe ?).

10) Soit A un groupe abélien et $\varphi : G \to A$ un morphisme de groupes de G dans A tel que φ induise (par factorisation) un isomorphisme entre $G/D(G)$ et A. Montrer que tout morphisme de groupes de G dans un groupe abélien B se factorise de façon unique par φ.

11) Calculer le groupe dérivé d'un groupe non abélien d'ordre pq (où p, q sont des nombres premiers distincts).

12) Soit G et H deux groupes. Calculer $D(G \times H)$.

13) Déterminer le sous-groupe dérivé de $\mathfrak{S}_n$, $\mathfrak{A}_n$ et de $\mathrm{GL}(V)$, $\mathrm{SL}(V)$ où V est un espace vectoriel de dimension finie. Calculer le sous-groupe dérivé de B le groupe des matrices triangulaires supérieures.

Exercice 9 : Sous groupe et arithmétique

1) Soient $m, n \in \mathbb{Z}$. Le groupe $\langle m, n \rangle$ engendré par m et n est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ donc de la forme $k\mathbb{Z}$. Exprimer k en fonction de m et n.

2) Même question avec $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$.

Exercice 10 : Exposant d'un groupe

Soit G un groupe abélien fini et $a, b \in G$. Si $g \in G$, on note $\mathrm{o}(g)$ son ordre. On note $\mathrm{Exp}(G)$ le plus petit entier n tel que $g^n = 1$ pour tout $g \in G$.

1) Soit $a \in G$ et soit $r \in \mathbb{N}^*$. Que vaut $\mathrm{o}(a^r)$?

2) Montrer que si $\mathrm{pgcd}(\mathrm{o}(a), \mathrm{o}(b)) = 1$ alors $\mathrm{o}(ab) = \mathrm{o}(a)\mathrm{o}(b)$.

3) Montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $\mathrm{o}(g) = \mathrm{ppcm}(\mathrm{o}(a), \mathrm{o}(b))$.

4) Montrer que $\mathrm{Exp}(G) \mid |G|$. Montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $\mathrm{o}(g) = \mathrm{Exp}(G)$. En déduire que si $\mathrm{Exp}(G) = |G|$ alors G est cyclique.

5) Montrer que tout sous-groupe fini de k^* (k un corps commutatif) est cyclique.

Exercice 11 : Action de groupe

Une action du groupe G sur l'ensemble X est une application

$$\begin{aligned} m\colon G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto m(g, x) := g \cdot x \end{aligned}$$

vérifiant $1_G \cdot x = x$ pour tout $x \in X$ et $(gg') \cdot x = g \cdot (g' \cdot x)$ pour tous $g, g' \in G$ et $x \in X$.

1) Soit $g \in G$. Montrer que l'application $\alpha_g : X \to X$ définie par $\alpha_g(x) = g \cdot x$ pour tout $x \in X$ est une bijection de X dont on donnera la bijection réciproque.

2) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon G &\longrightarrow \mathfrak{S}(X) \\ g &\longmapsto \alpha_g \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes.

3) Inversement, à partir d'un morphisme de groupes $\varphi : G \to \mathfrak{S}(X)$, construire une action de G sur X.

Morale : *une action de groupe de G sur X est la même chose qu'un morphisme de groupes de G dans* $\mathfrak{S}(X)$.

4) Montrer que la relation $x \sim y \iff \exists g \in G,\ g \cdot x = y$ est une relation d'équivalence sur X. La classe d'équivalence de x est appelé *l'orbite de x sous G* noté $\mathcal{O}(x)$.

5) Montrer que $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ est un sous-groupe de G appelé le *stabilisateur de x*.

6) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \delta_x\colon G/G_x &\longrightarrow \mathcal{O}(x) \\ gG_x &\longmapsto gx \end{aligned}$$

est bien définie et est une bijection G-équivariante.

Exercice 12 : Groupe symétrique

1) Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions $(1,2), (2,3), \ldots, (n-1, n)$. En déduire une famille génératrice de $\mathfrak{A}_n$.

2) Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions $(1,2), (1,3), \ldots, (1, n)$. En déduire une famille génératrice de $\mathfrak{A}_n$.

3) Montrer que $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les carrés des éléments de $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 13 : Exposant d'un groupe

Soit A un anneau euclidien, soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers non nuls. On note $GL_n(A)$ le groupe des éléments inversibles de l'anneau $M_n(A)$.

1) Montrer que $M \in M_n(A)$ est dans $GL_n(A)$ si et seulement si $det(M) \in A^\times$. Que devient cette condition si $A = \mathbb{Z}$?

On note $SL_n(A) = \{P \in GL_n(A) \mid det(P) = 1\}$.

2) Justifier que $SL_n(A)$ est un sous-groupe distingué de $GL_n(A)$.

3) Soient $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ distincts et $a \in A$. On note $T_{i,j}(A)$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf les coefficients diagonaux qui valent 1 et le coefficient en ligne i et colonne j qui vaut a. Une telle matrice est appelée une *matrice de transvection.*

(i) Montrer que, pour i, j fixés, l'ensemble $\{T_{i,j}(a) \mid a \in A\}$ est un sous-groupe de $SL_n(A)$.

(ii) Soit $M \in M_{n,m}(A)$. Calculer les coefficients de $T_{i,j}(a)M$ en fonction de ceux de M. Que constate-t-on ?

(iii) Soit $M \in M_{m,n}(A)$. Calculer les coefficients de $MT_{i,j}(a)$ en fonction de ceux de M. Que constate-t-on ?

4) Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $a \in A^\times$. On note $D_i(a)$ la matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1 sauf celui en ligne i qui vaut a. Une telle matrice est appelée une *matrice de dilatation.*

(i) Quel est le sous-groupe de $GL_n(A)$ engendré par l'ensemble des matrices de dilatation ?

(ii) Soit $M \in M_{n,m}(A)$ et $D \in GL_n(A)$ une matrice de dilatation. Calculer les coefficients de DM en fonction de ceux de M. Que constate-t-on ?

(iii) Soit $M \in M_{n,m}(A)$ et $D \in GL_m(A)$ une matrice de dilatation. Calculer les coefficients de MD en fonction de ceux de M. Que constate-t-on ?

5) Soit $M = [a_1, \ldots, a_n]^t \in M_{n,1}(A)$ et soit d un pgcd de $a_1, \ldots, a_n$. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(A)$ tel que $PM = [d, 0, \ldots, 0]$. Que peut-on dire de P ?

6) Soit $M \in M_{n,m}(A)$. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(A)$ et $Q \in GL_m(A)$ s'écrivant toutes deux comme des produits de matrices de transvection et telles que PMQ est diagonale par blocs $\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & a_r & \\ & 0 & & 0 \end{bmatrix}$ où $a_1, \ldots, a_r \in A$ sont non nuls et tels que $a_1 | a_2 | \cdots | a_r$. Que constate-t-on lorsque A est un corps ?

7) En déduire que $SL_n(A)$ est engendré par l'ensemble des matrices de transvection et que $GL_n(A)$ est engendré par l'ensemble constitué des matrices de transvection et de celles de dilatation.

8) Montrer que la suite $a_1, \ldots, a_r$ est uniquement déterminée par M, à la multiplication prés de chaque a_i par une élément inversible de A (on pourra caractériser le produit $a_1 \cdots a_i$ en fonction de M).

9) *Question subsidiaire :* (à garder éventuellement pour la série d'exercice sur les anneaux) : les résultats précédents s'étendent-ils au cas où A est un anneau principal ?

10) *Application :* soit k un corps et $A = k[X]$. Soit B la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Calculer une suite d'éléments $a_1, \ldots, a_r \in A$ (comme ci-dessus) pour la matrice $M = B - X.Id \in M_5(A)$.