My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Td : Arithmétique dans Z

Les fonctions artihmétiques multiplicatives

Notations

– Dans ce problème, le mot « entier » (sans précision supplémentaire) désigne les éléments de $\mathbb{N}^*$.
On note respectivement $m \wedge n$ et $m \vee n$ le pgcd et le ppcm de deux entiers m et n.

– On appelle *fonction arithmétique* toute application f de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$.
On dit que f est *multiplicative* si $f(1) = 1$ et si $m \wedge n = 1 \Rightarrow f(mn) = f(m)f(n)$.
L'objet de ce problème est d'étudier quelques fonctions arithmétiques multiplicatives classiques.

– On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des entiers premiers.
Pour tout entier n, on désigne par $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des entiers qui divisent n.
On note alors $\mathbb{P}_n$ l'ensemble des diviseurs premiers de n. Ainsi $\mathbb{P}_n = \mathbb{P} \cap \mathcal{D}_n$.

– Pour tout p de $\mathbb{P}$ et tout entier n, on note $v_p(n) = \max\{k \in \mathbb{N},\ p^k \mid n\}$.
On dit que $v_p(n)$ est la *valuation* de n pour l'entier premier p. Il est clair que $p \in \mathbb{P}_n \Leftrightarrow v_p(n) \geqslant 1$.
L'entier $v_p(n)$ représente l'exposant de p dans la décomposition de n en facteurs premiers.
Exemple : si $n = 56 = 2^3 7$ alors $v_2(n) = 3, v_7(n) = 1$ et $\forall\, p \in \mathbb{P} \setminus \{2, 7\},\ v_p(n) = 0$.

I. Généralités

On se propose d'établir ici quelques résultats arithmétiques portant ou non sur les fonctions arithmétiques, et qui s'avèreront utiles dans la suite du problème.

1. On se donne deux entiers m et n quelconques.
   (a) Justifier rapidement les égalités $\mathcal{D}_m \cap \mathcal{D}_n = \mathcal{D}_{m\wedge n}$ et $\mathbb{P}_m \cap \mathbb{P}_n = \mathbb{P}_{m\wedge n}$. [S]
   (b) Prouver l'égalité $\mathbb{P}_m \cup \mathbb{P}_n = \mathbb{P}_{m\vee n}$. [S]
   (c) Que dire de $\mathbb{P}_m$ et $\mathbb{P}_n$ si m, n sont premiers entre eux ? [S]
2. Soient a, b, c trois entiers tels que $a \wedge b = 1$. On veut prouver que $\begin{cases} a \wedge (bc) = a \wedge c \\ (ab) \wedge c = (a \wedge c)(b \wedge c) \end{cases}$
   Pour cela, on demande deux méthodes distinctes :
   (a) Poser $d = a \wedge c$, et considérer les entiers a', b' tels que $a = da'$ et $c = dc'$. [S]
   (b) Utiliser les valuations $v_p(a), v_p(b), v_p(c)$ pour tout p de $\mathbb{P}$. [S]
3. On se donne deux entiers m et n premiers entre eux.
   On considère l'application ψ définie de $\mathcal{D}_m \times \mathcal{D}_n$ dans $\mathcal{D}_{mn}$ par $\psi(d, \delta) = d\,\delta$.
   De même, soit ξ l'application de $\mathcal{D}_{mn}$ dans $\mathcal{D}_m \times \mathcal{D}_n$ définie par $\xi(q) = (m \wedge q, n \wedge q)$.
   Montrer que ψ et ξ sont deux bijections réciproques l'une de l'autre. [S]
4. Dans cette question, on se donne une fonction multiplicative f.
   (a) Si $m_1, \ldots, m_q$ sont premiers entre eux deux à deux montrer que $f\Big(\prod_{j=1}^{q} m_j\Big) = \prod_{j=1}^{q} f(m_j)$. [S]
   (b) Montrer que f est caractérisée par les $f(p^k)$, où $(p, k) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*$. [S]

II. Exemples de fonctions multiplicatives

Dans cette partie, on découvre quelques fonctions multiplicatives simples et classiques.

1. Pour tout $n \geqslant 1$, on note $\omega(n) = \operatorname{card} \mathbb{P}_n$: c'est le nombre de diviseurs premiers de n.
   (a) Montrer que pour tout z de $\mathbb{C}^*$, l'application $f : n \mapsto z^{\omega(n)}$ est multiplicative. [S]
   (b) Que valent les $f(p^k)$, pour tous p dans $\mathbb{P}$ et k dans $\mathbb{N}^*$? [S]

2. Pour tout $n \geqslant 1$, on note $\tau(n) = \operatorname{card} \mathcal{D}_n$: c'est le nombre d'entiers qui divisent n.
   (a) Montrer que l'application τ est multiplicative (utiliser I.3.) [S]
   (b) Que valent les $\tau(p^k)$, pour tous p dans $\mathbb{P}$ et k dans $\mathbb{N}^*$? [S]
   (c) En déduire que pour tout $n \geqslant 2$, on a $\tau(n) = \prod\limits_{p \in \mathbb{P}_n} (v_p(n) + 1)$. [S]

3. On définit la *fonction de Moëbius* $n \mapsto \mu(n)$ de la façon suivante :
   S'il existe p dans $\mathbb{P}$ tel que $v_p(n) \geqslant 2$, alors $\mu(n) = 0$. Sinon $\mu(n) = (-1)^{\omega(n)}$.
   Ainsi $\mu(n) = 0$ si n est divisible par le carré d'un entier premier, et sinon $\mu(n) = 1$ ou $\mu(n) = -1$ selon que les facteurs premiers de n (qui sont alors distincts) sont en nombre pair ou impair.
   (a) Montrer que l'application μ est multiplicative. [S]
   (b) Que valent les $\mu(p^k)$, pour tous p dans $\mathbb{P}$ et k dans $\mathbb{N}^*$? [S]