My Ismail Mamouni
http ://myismail.net
مَمُوني مُولَاي اسماعِيل

Exercices : Espaces Préhilbertiens

Les Extraits Mines

Mines 2017

1. Montrer qu'une matrice symétrique $S \in S_n(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si son spectre est contenu dans $\mathbb{R}^{*+}$.

2. En déduire que pour tout $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe $R \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $S = R^T R$. Réciproquement montrer que pour tout $R \in GL_n(\mathbb{R})$, $R^T R \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

3. Montrer que l'ensemble $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe.

5. On désigne par g un endomorphisme de E tel que pour tous x, y dans E, $\langle x, y\rangle = 0$ implique $\langle g(x), g(y)\rangle = 0$.

   Montrer qu'il existe un nombre réel positif k tel que pour tout $x \in E$, $\|g(x)\| = k\|x\|$. (On pourra utiliser une base orthonormée $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de E et considérer les vecteurs $e_1 + e_i$ et $e_1 - e_i$ pour $i \in \{2, \ldots, n\}$.)

   En déduire que g est la composée d'une homothétie et d'un endomorphisme orthogonal.

Mines 2016

C Inégalité de Hoffman-Wielandt

Dans cette partie, on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire défini par $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}({}^tA \cdot B)$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques et $O_n(\mathbb{R})$ celui des matrices orthogonales.

15. Montrer que pour tous $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P, Q dans $O_n(\mathbb{R})$, on a $\|PAQ\| = \|A\|$.

Dans la suite de cette partie, A et B désignent deux matrices ***symétriques réelles****.*

On note $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des matrices *bistochastiques* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls et tels que $\displaystyle\sum_{j=1}^n A_{i,j} = \sum_{j=1}^n A_{j,i} = 1$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

16. Montrer qu'il existe deux matrices diagonales réelles D_A,D_B, et une matrice orthogonale $P = (P_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ telles que $\|A - B\|^2 = \|D_A P - P D_B\|^2$.

17. Montrer que la matrice R définie par $R_{i,j} = (P_{i,j})^2$ pour tous i, j dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ est bistochastique et que

$$\|A - B\|^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} R_{i,j}|\lambda_i(A) - \lambda_j(B)|^2$$

   où $\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)$ désignent les valeurs propres de A et $\lambda_1(B), \ldots, \lambda_n(B)$ celles de B.

18. En déduire que $$\min_\sigma \sum_{j=1}^n |\lambda_{\sigma(j)}(A) - \lambda_j(B)|^2 \leqslant \|A - B\|^2$$

   où le minimum porte sur l'ensemble de toutes les permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Mines 2015 Opérateur de Volterra et équations différentielles

L'objectif de ce problème est l'étude d'un opérateur de Volterra appliqué notamment à la résolution de certaines équations différentielles.

On considère l'espace vectoriel E des fonctions réelles définies et continues sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, muni du produit scalaire défini pour tous f, g dans E par :

$$\langle f, g\rangle = \int^{\frac{\pi}{2}} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

A. Opérateur de Volterra

On note V et V^* les endomorphismes de E défini par les formules :

$$V(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad V^*(f)(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

pour tous $f \in E$ et $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

1) En observant que $V(f)$ et $-V^*(f)$ sont des primitives de f, montrer que pour tous f, g dans E, on a $\langle V(f), g\rangle = \langle f, V^*(g)\rangle$.

2) Montrer que l'endomorphisme $V^* \circ V$ est symétrique défini positif. En déduire que ses valeurs propres sont strictement positives.

Soit λ une valeur propre de $V^* \circ V$ et f_λ un vecteur propre associé à λ.

3) Montrer que f_λ est de classe C^2 et est solution de l'équation différentielle : $y'' + \frac{1}{\lambda} y = 0$ avec les conditions $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $y'(0) = 0$.

4) En déduire que λ est une valeur propre de $V^* \circ V$ si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda = \frac{1}{(2n+1)^2}$. Préciser alors les vecteurs propres associés.

Mines 2021

Matrices de permutations

Le but de cette partie est d'étudier l'action sur les matrices diagonales de la conjugaison par des matrices de permutations. On considère l'application ω de B_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par :

$$\forall \sigma \in B_n,\ \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ [\omega(\sigma)]_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}.$$

B_n désigne l'ensemble des bijections de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même ;

1 ▷ Démontrer que pour tout $(\sigma, \sigma') \in B_n^2$, $\omega(\sigma \circ \sigma') = \omega(\sigma)\,\omega(\sigma')$.

2 ▷ Démontrer que $\omega(B_n) \subset O_n(\mathbf{R})$.

3 ▷ Soit $\sigma \in B_n$ et $(d_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbf{R}^n$. Vérifier que :

$$\mathrm{Diag}\big((d_i)_{1\leq i\leq n}\big)\,\omega(\sigma) = \omega(\sigma)\,\mathrm{Diag}\big((d_{\sigma(i)})_{1\leq i\leq n}\big).$$

4 ▷ En déduire l'équivalence suivante concernant deux éléments D et D' de $D_n(\mathbf{R})$,

i) D et D' ont le même ensemble de coefficients diagonaux, chacun ayant le même nombre d'occurrences dans D et D'.

ii) il existe $M \in \omega(B_n)$ telle que $D' = {}^tMDM$.

Fonctions de matrices symétriques

Cette partie a pour objectif de définir une correspondance entre l'espace des fonctions de I dans $\mathbf{R}$ et l'espace des fonctions de $S_n(I)$ dans $S_n(\mathbf{R})$, puis d'en démontrer quelques propriétés. Dans cette partie, f est une fonction de I dans $\mathbf{R}$.

$S_n(I)$ désigne l'ensemble des matrices de $S_n(\mathbf{R})$ dont le spectre réel est inclus dans I ;

5 $\triangleright$ Soit $S \in S_n(I)$. Justifier l'existence de $\Omega \in O_n(\mathbf{R})$ et de $(s_i)_{1\leq i\leq n} \in I^n$ tels que :

$$S = {}^t\Omega \operatorname{Diag}\big((s_i)_{1\leq i\leq n}\big)\, \Omega.$$

6 $\triangleright$ Pour tout $(s_i)_{1\leq i\leq n} \in I^n$, justifier l'existence d'un élément P de $\mathbf{R}[X]$ tel que :

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!]\,,\ P(s_i) = f(s_i).$$

Soit $S \in S_n(I)$. On suppose que l'on dispose des deux écritures :

$$S = {}^t\Omega \operatorname{Diag}\big((s_i)_{1\leq i\leq n}\big)\, \Omega \quad \text{et} \quad S = {}^t\Omega' \operatorname{Diag}\big((s'_i)_{1\leq i\leq n}\big)\, \Omega',$$

avec Ω, $\Omega' \in O_n(\mathbf{R})$ et $(s_i)_{1\leq i\leq n}$, $(s'_i)_{1\leq i\leq n} \in I^n$.

7 $\triangleright$ Montrer que l'on a alors :

$${}^t\Omega' \operatorname{Diag}\Big(\big(f(s'_i)\big)_{1\leq i\leq n}\Big)\, \Omega' = {}^t\Omega \operatorname{Diag}\Big(\big(f(s_i)\big)_{1\leq i\leq n}\Big)\, \Omega,$$

puis que ${}^t\Omega \operatorname{Diag}\Big(\big(f(s_i)\big)_{1\leq i\leq n}\Big)\, \Omega \in S_n(\mathbf{R})$.

Dans la suite du problème, on note u l'application qui, à toute fonction φ de I dans $\mathbf{R}$, associe $u(\varphi)$ la fonction de $S_n(I)$ dans $S_n(\mathbf{R})$ définie par :

$$\forall\, S \in S_n(I),\ u(\varphi)(S) = {}^t\Omega \operatorname{Diag}\Big(\big(\varphi(s_i)\big)_{1\leq i\leq n}\Big)\, \Omega,$$

où $S = {}^t\Omega \operatorname{Diag}\big((s_i)_{1\leq i\leq n}\big)\, \Omega$, avec $\Omega \in O_n(\mathbf{R})$ et $(s_i)_{1\leq i\leq n} \in I^n$.

Cette fonction est bien définie puisque, d'après la question précédente, $u(\varphi)(S)$ ne dépend pas du choix des matrices $\Omega \in O_n(\mathbf{R})$ et $D = \operatorname{Diag}\big((s_i)_{1\leq i\leq n}\big)$ avec $(s_i)_{1\leq i\leq n} \in I^n$, tel que $S = {}^t\Omega D\Omega$.

Enfin, on désigne par v l'application $\operatorname{Tr} \circ u$.

8 $\triangleright$ Vérifier que u et v sont linéaires, puis calculer, pour toute fonction φ de I dans $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in I$, $u(\varphi)(xI_n)$.

9 $\triangleright$ Étudier l'injectivité et la surjectivité de u.

10 $\triangleright$ On suppose que f est polynomiale ; montrer qu'il existe $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que pour tout $S \in S_n(I)$, $u(f)(S) = P(S)$.

Réciproquement, est-il vrai que, s'il existe $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que pour tout $S \in S_n(I)$, $u(f)(S) = P(S)$, alors f est polynomiale ?

A. Produit scalaire de matrices

On rappelle que $\mathrm{tr}(A)$ désigne la trace de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que pour toute base orthonormée $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a la formule $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \langle Ae_i, e_i\rangle$.

2) Montrer que l'application $(A, B) \to \mathrm{tr}({}^tAB)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, noté $\langle\ ,\ \rangle$.

3) Si A et B sont symétriques réelles positives, montrer que $\langle A, B\rangle \geqslant 0$. On pourra utiliser une base orthonormée de vecteurs propres de B.

B. Décomposition polaire

Soit f un endomorphisme de E. On note A la matrice de f dans une base orthonormée de E, et on note f^* l'adjoint de f.

4) Montrer que ${}^tAA$ est une matrice symétrique réelle positive. Exprimer $\|A\|_2$ en fonction des valeurs propres de ${}^tAA$.

5) Montrer qu'il existe un endomorphisme auto-adjoint positif h de E tel que $f^* \circ f = h^2$.

6) Montrer que la restriction de h à $\mathrm{Im}\, h$ induit un automorphisme de $\mathrm{Im}\, h$. On notera cet automorphisme $\tilde{h}$.

7) Montrer que $\|h(x)\| = \|f(x)\|$ pour tout $x \in E$. En déduire que $\mathrm{Ker}\, h$ et $(\mathrm{Im}\, f)^\perp$ ont même dimension et qu'il existe un isomorphisme v de $\mathrm{Ker}\, h$ sur $(\mathrm{Im}\, f)^\perp$ qui conserve la norme.

8) À l'aide de $\tilde{h}$ et v, construire un automorphisme orthogonal u de E tel que $f = u \circ h$.

9) En déduire que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme $A = US$, où $U \in O_n(\mathbb{R})$ et S est une matrice symétrique positive.
On admet que si A est inversible, cette écriture est unique.

C. Projeté sur un convexe compact

Soit H une partie de E, convexe et compacte, et soit $x \in E$. On note

$$d(x, H) = \inf_{h \in H} \|x - h\|.$$

10) Montrer qu'il existe un unique $h_0 \in H$ tel que $d(x, H) = \|x - h_0\|$. On pourra utiliser pour h_0, h_1 dans H la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par la formule $q(t) = \|x - th_0 - (1-t)h_1\|^2$.

11) Montrer que h_0 est caractérisé par la condition $\langle x - h_0, h - h_0\rangle \leqslant 0$ pour tout $h \in H$. On pourra utiliser la même fonction $q(t)$ qu'à la question précédente.

Le vecteur h_0 s'appelle *projeté* de x sur H.